المحاضرة الثانية

تكافؤ القضايا:

نقول عن قضيتين p, q أنهما متكافئتان ونرمز لذلك $p \equiv q$.
اذا كان لهما نفس قيم الحقيقة

الاستدلال : tautology:

هي قضية قيمتها دائماً صحيحة وذلك مهما كانت القيم المنطقية لفرضيات القضايا البسيطة.

مثال: قضية $p \vee \neg p$ هي استدلال لأن

2+2=4 استدلال لأنها دائماً صحيحة

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
F	T	T
T	F	T

التناقض : contradection:

هي قضية قيمتها خاطئة وذلك مهما كانت القيم المنطقية لفرضيات القضايا البسيطة

مثال: قضية $p \wedge \neg p$ هي تناقض لأن

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

مثال: برهن أن القضية التالية استدلال:

$$Q : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	Q
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

/ /

مثال: برهن بدون استخدام جدول الحقيقة أن القضية التالية استدلال:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

الحل: حسب خاصية الاقتضاء $\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

حسب دومرغان $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$

حسب خاصية تجميعية لـ $\vee$ $\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$

$\equiv T \vee T$

حسب خاصية اللانمو $\equiv T$

مثال: برهن بدون استخدام جدول الحقيقة أن:

$$[(a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow d)] \rightarrow (b \vee d) \equiv a \vee b \vee d$$

الحل: $[(a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow d)] \rightarrow (b \vee d)$

حسب الاقتضاء $\equiv \neg[(a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow d)] \vee (b \vee d)$

حسب دومرغان $\equiv [\neg(a \rightarrow b) \wedge \neg(a \rightarrow d)] \vee (b \vee d)$

حسب الاقتضاء $\equiv [\neg(\neg a \vee b) \wedge \neg(\neg a \vee d)] \vee (b \vee d)$

حسب دومرغان $\equiv [(a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg d)] \vee (b \vee d)$

حسب تجميعية $\equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (b \vee d)$

حسب توزيع $\vee$ على $\wedge$ $\equiv (a \vee b \vee d) \wedge [\neg(b \vee d) \vee (b \vee d)]$

$\equiv (a \vee b \vee d) \wedge T$

$\equiv a \vee b \vee d$

مثال: أثبت تكافؤ القضيتين بدون استخدام جدول الحقيقة:

$$p \vee [(q \rightarrow \neg r) \wedge \neg p] \equiv p \vee \neg q \vee \neg r$$

الحل: $p \vee [(q \rightarrow \neg r) \wedge \neg p]$

حسب الاقتضاء $\equiv p \vee [(\neg q \vee \neg r) \wedge \neg p]$

حسب توزيع $\wedge$ على $\vee$ $\equiv (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg p)$

$\equiv p \vee \neg q \vee \neg r \wedge T$

$\equiv p \vee \neg q \vee \neg r$

مثال: هل $p\wedge(\neg q\vee r) \equiv \neg p\vee(q\wedge\neg r)$:

الحل: $p\wedge(\neg q\vee r) \equiv p\wedge\neg(q\wedge\neg r)$

$\equiv \neg(\neg p\vee(q\wedge\neg r))$

ومنه القضيتين غير متكافئتين حيث أن القضية في الطرف اليسار هي نفي القضية في الطرف اليميني.

الرابط XOR أو exclusive:

($p\oplus q$ أي إما p أو q ولكن ليس كلاهما)

لتكن p,q قضيتين عندئذ يرمز للرابط XOR بينهما بـ $\oplus$ أي $p\oplus q$

* جدول الحقيقة:

p	q	$p\oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$p\oplus q\equiv(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\equiv(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$$

مثال: لتكن p, q القضيتين التاليتين:

p عاطف سينجح في مادة المنطق الرياضي

q عاطف سيرسب في مادة المنطق الرياضي

الحل: عندئذ $p\oplus q$ هي القضية التالية:

عاطف سينجح أو سيرسب في مادة المنطق الرياضي

الرابط $\Leftrightarrow$:

لتكن p,q قضيتين عندئذ $p\Leftrightarrow q$

هي القضية "p if and only if q"

" p إذا وفقط إذا q "

"وتكون صحيحة عندما يكون لـ p و q نفس قيمة الحقيقة وتكون خاطئة خلاف ذلك"

* جدول الحقيقة:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال: أوجد القيمة الحقيقية للقضايا التالية:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$2+2=4$ if and only if $1+1=2$ — $\underbrace{2+2=4}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{1+1=2}_{T}$ } T

$0>1$ if and only if $2>1$ — $\underbrace{0>1}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{2>1}_{T}$ } F

If $2+5>10$, then $2+4=6$ — $\underbrace{2+5>10}_{F} \Rightarrow \underbrace{2+4=6}_{T}$ } T

If $\underbrace{\text{monkeys can fly}}_{F}$ then $\underbrace{1+1=3}_{F}$ } T

شكل العطف النظامي (Conjunctive Normal Form) CNF:

يمكن تحويل القضايا المركبة إلى شكل العطف النظامي بحيث تصبح مؤلفة من مجموعة من القضايا يفصل بينها العطف ($\wedge$) حيث أن القضايا المعطوفة إما أن تكون قضية بسيطة (مثل p أو $\neg p$ أو q) أو مجموعة قضايا مفصولة بـ أو ($\vee$) ($p \vee \ldots$)

اذا كانت القضية مكونة من قضية بسيطة فهي تكون بشكل العطف النظامي

أمثلة: d هي شكل العطف النظامي

$\neg f$ هي شكل العطف النظامي

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s \vee t) \wedge (q \vee \neg t \vee F \vee d)$$

ومنه

$p \vee q \vee \neg r$

$\neg p \vee \neg r \vee s \vee t$

$q \vee \neg t \vee F \vee d$

$p \vee \neg r \vee d \vee \neg q$ هي شكل العطف النظامي

$p \wedge q \wedge r$

ومنه p

q

r

خطوات التحويل إلى شكل العطف النظامي:

1- حذف الاقتضاء $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

2- استخدام قانون النفي المزدوج وقانون دومورغان في حال وجود النفي

$\neg(\neg p) \equiv p$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

3- استخدام قوانين التوزيع

مثال: حول الصيغة التالية إلى صيغة العطف النظامي CNF:

$\neg(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$

الحل:

$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee p)$

$\equiv (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee p)$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee p)$

$\equiv (p \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$

$\equiv (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$

ومنه $p \vee \neg r$

$\neg q \vee \neg r \vee p$

عبارات هورن Horn:

هي عبارة عن مجموعة من القضايا يفصل بينها $(\vee)$ بحيث يكون في هذه القضايا قضية بسيطة واحدة على الأكثر موجبة (أي لا يوجد قبلها إشارة $\neg$)

مثال: $\neg p \vee q \vee \neg l$ هي عبارة هورن

$\neg k \vee \neg d$ هي عبارة هورن

$\neg p \vee q \vee l$ ليست عبارة هورن

ملاحظة: كل عبارة هورن يمكن كتابتها كاقتضاء مقدمته عطف من القضايا البسيطة الموجبة والتي كانت سالبة في عبارة هورن ونتيجته هي القضية الوحيدة البسيطة الموجبة والتي كانت موجبة في عبارة هورن.

مثال: حول الصيغ التالية:

$$\neg p \vee q \vee \neg l \equiv \neg p \vee \neg l \vee q$$
$$\equiv \neg (p \wedge l) \vee q$$
$$\equiv p \wedge l \Rightarrow q$$
$$\neg p \vee \neg l \equiv \neg (p \wedge l)$$
$$\equiv p \wedge l \Rightarrow Null$$

طرق البرهان في منطق الفرضيات (القضايا):

ـ قضية الحل Resolution:

الخطوات: $\boxed{1}$ تحويل الصيغ إلى شكل العطف النظامي اذا لم تكن كذلك

$\boxed{2}$ تطبيق قاعدة التبسيط (حذف العطف) $p \wedge q$ إما p أو q لفصل القضايا المعطوفة في صيغة العطف النظامي ان وجدت

$W_1 \wedge W_2 \wedge W_3$ ومنه W_1 , W_2 , W_3

$(\neg p \vee q) \wedge (r \wedge \neg k) \wedge d$ ومنه $\neg p \vee q$

$r \wedge \neg k$

d

$\boxed{3}$ اذا وجدنا القضية في صيغة ونفيها في صيغة أخرى فإننا نستنتج صيغة جديدة تحوي كل القضايا الأخرى الموجودة في الصيغة بعد حذف القضية ونفيها مع الانتباه إلى وضع $(\vee)$ بينهما

قاعدة الحل:

$$\begin{array}{l} p \vee q \vee \neg r \\ \neg p \vee q \vee l \\ \hline q \vee \neg r \vee l \end{array}$$

مثال: لتكن لدينا الحقائق التالية (المعارف):

$p \Rightarrow q$

$r \vee p$

أثبت أن $q \vee r$ باستخدام تقنية الحل

الحل: نحول $p \Rightarrow q$ إلى شكل العطف النظامي $p \Rightarrow q \equiv \boxed{\neg p \vee q}$

$r \vee p$ إلى شكل العطف النظامي $\boxed{r \vee p}$

① $\neg p \vee q$ فرضاً

② $r \vee p$ فرضاً

③ $q \vee r$ من ① و ② حسب الحل

$\neg p \vee q$ $\quad$ $r \vee p$

$q \vee r$

مثال: لتكن لدينا الحقائق التالية (المعارف):

$p \Rightarrow q$

$r \wedge p$

أثبت q باستخدام تقنية الحل

الحل: نحول $p \Rightarrow q$ إلى شكل العطف النظامي $p \Rightarrow q \equiv \boxed{\neg p \vee q}$

$r \wedge p$ ومنه حسب التبسيط $\boxed{r}$

$\boxed{p}$

$\neg p \vee q$ $\quad$ p $\quad$ p

q

ملاحظة: ليس من الضروري استخدام جميع الصيغ الموجودة في اثبات المطلوب (الحل)

سؤال: لو طلب اثبات $q \wedge r$

$\neg p \vee q$ $\quad$ p $\quad$ r

q

$q \wedge r$

ج_ تقنية الحل بنقض الفرض Re Finement :

عند استخدام تقنية النقض علينا اتباع ما يلي :

1 نأخذ نفي القضية المطلوب برهانها ونحولها بعد النفي إلى صيغة العطف النظامي ونضيفها إلى مجموعة الحقائق الموجودة لدينا

2 نحول كل الصيغ الموجودة إلى شكل العطف النظامي

3 نطبق تقنية الحل إلى أنه يصبح لدينا تناقض (Null) وبالتالي تكون الصيغة المطلوب برهانها صحيحة

مثال : لتكن لدينا الحقائق التالية (المعارف) :

$p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow r$

$r \Rightarrow s$

اثبت أن $p \Rightarrow s$ باستخدام تقنية النقض

الحل : ننفي الطلب $p \Rightarrow s$ يصبح $\neg(p \Rightarrow s)$ ونحوله إلى شكل العطف النظامي / ونضيفه إلى مجموعة المعارف التي لدينا فتصبح :

$p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow r$

$r \Rightarrow s$

$\neg(p \Rightarrow s)$

نحول كل منها إلى شكل العطف النظامي

* $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
* $q \Rightarrow r \equiv \neg q \vee r$
* $r \Rightarrow s \equiv \neg r \vee s$
* $\neg(p \Rightarrow s) \equiv \neg(\neg p \vee s) \equiv p \wedge \neg s$

ومنه حسب التبسيط p

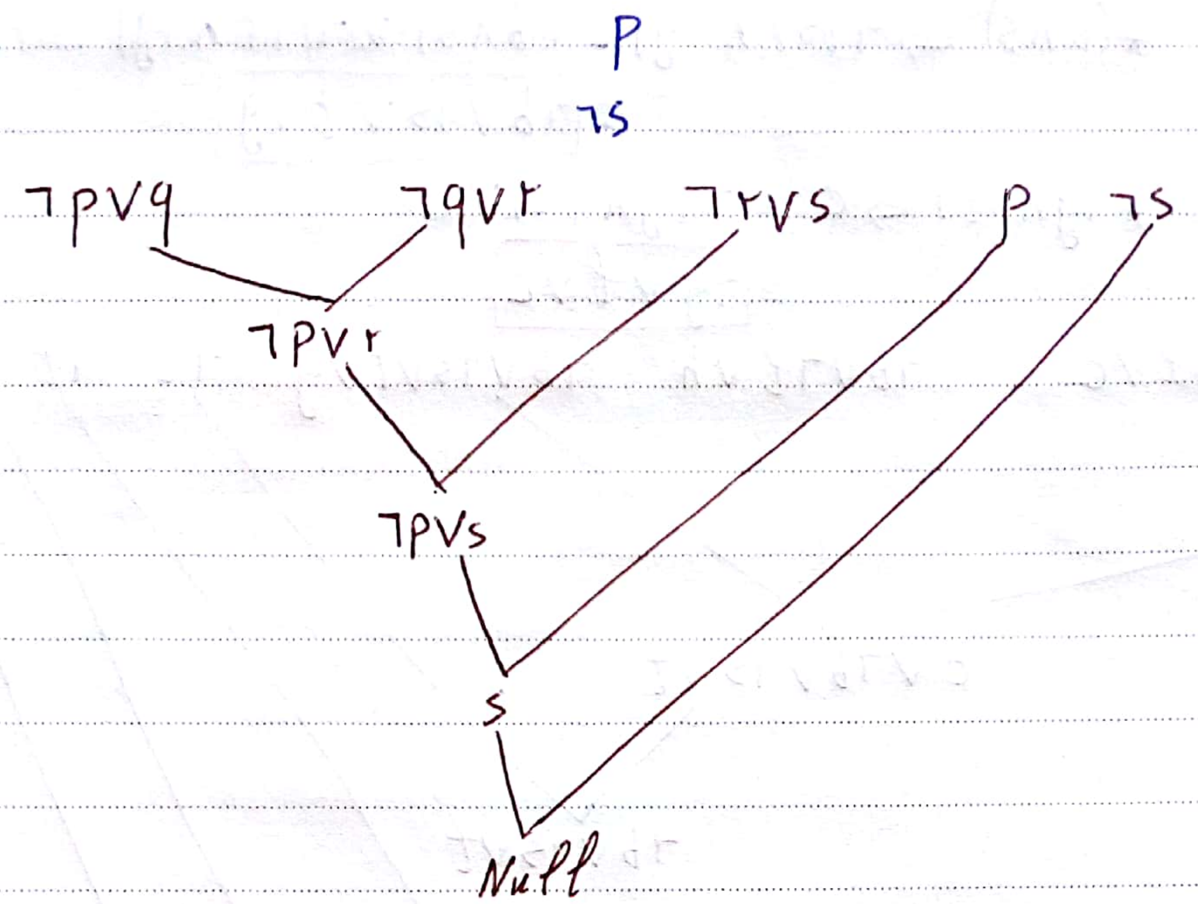
$\neg s$

أصبح لدينا المعارف التالية

$\neg p \vee q$

$\neg q \vee r$

$\neg r \vee s$



مثال: لتكن لدينا الحقائق التالية (المعارف):

$b \Rightarrow \neg(l \wedge \neg h)$

$(b \wedge s) \Rightarrow \neg(\neg t \wedge \neg g)$

$(g \wedge \neg l) \Rightarrow c$

h

b

s

$\neg t$

$\neg c$

المطلوب اثبات l وذلك باستخدام النقض

الحل: ① ننفي المطلوب l فتصبح $\neg l$ ونضيفه إلى مجموعة المعارف

② نحول كل المعارف إلى شكل العطف النظامي

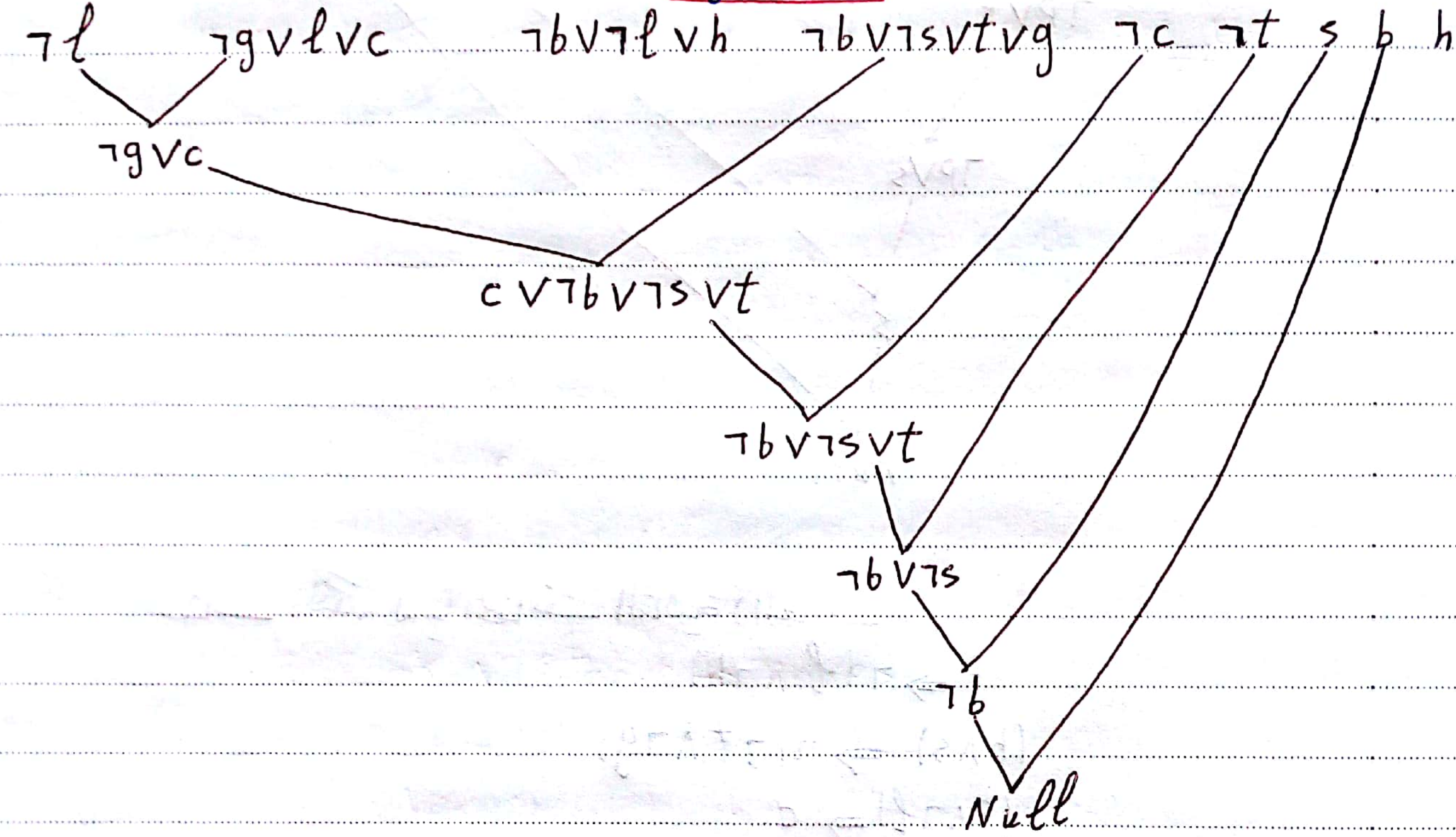
$\neg l$ في الشكل العطف النظامي

$\neg c, \neg t, s, b, h$ في شكل العطف النظامي

$* \; b \Rightarrow \neg(l \wedge \neg h) \equiv \neg b \vee \neg(l \wedge \neg h)$

$\equiv \boxed{\neg b \vee \neg l \vee h}$

$$*\ (b \wedge s) \Rightarrow \neg(\neg t \wedge \neg g) \equiv \neg(b \wedge s) \vee \neg(\neg t \wedge \neg g)$$
$$\equiv \boxed{\neg b \vee \neg s \vee t \vee g}$$
$$*\ (g \wedge \neg l) \Rightarrow c \equiv \neg(g \wedge \neg l) \vee c$$
$$\equiv \boxed{\neg g \vee l \vee c}$$



مثال : لتكن لدينا روبوت مشحون ونريد أن يحمل الروبوت كتلة فاذا كانت هذه الكتلة قابلة للحمل و الروبوت مشحون عندها ستتحرك ذراع الروبوت عند محاولته رفع الكتلة التي يجب بها استخدام تقنية النقض لبرهان أنه الكتلة لا يمكن حملها

(غير صحيح)

الحل : نرمز للكتلة قابلة للحمل liftable

نرمز الروبوت المشحون BAT_ok

تحرك ذراع الروبوت Moves

المعارف :

$$liftable \wedge BAT\_ok \Rightarrow Moves$$

المطلوب $\neg\neg liftable$ أي ننفيها فيصبح لدينا liftable

في شكل العطف النظامي $\boxed{BAT\_ok}$

في شكل العطف النظامي $\boxed{liftable}$

ركز الصحيح وسيتم اعادته في المحاضرة القادمة من قبل الدكتورة

$liftable \land BAT\_ok \Rightarrow Moves$

$\equiv \neg(liftable \land BAT\_ok) \lor Moves$

$\equiv \neg liftable \lor \neg BAT\_ok \lor Moves$

انتهت المحاضرة