نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة: السادسة عنوان المحاضرة: خواص دوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. **حل بعض التمارين بالاستفادة من خواص و معايير الدالة ذات التغير المحدود**
2. **حل وظيفة المحاضرة الرابعة**

قبل ان نبدأ بالتمرين الأول سنوضح $[x]$ تدعى دالة الجزء الصحيحة للعدد الحقيقي x و هي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x $n \in \mathbb{Z}$: $n \le x < n+1$ فإن $[x]$ تاخذ قيمة n مثال: $0 \le x < 1$ فإن $[x] = 0$ و $2 \le x < 3$ فإن $[x] = 2$ و هكذا...

التمارين:

1- أثبت ان الدالة f دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ مستخدما خواص الدالة ذات التغير المحدود

$$f(x) = x - [x] + |x| + \frac{1}{x} - 8$$

الحل:

إن الحل بسيط لهذه الدالة و هنالك العديد م الطرق لإثبات أن f دالة ذات تغير محدود سنذكر منها:

إن $f_1(x) = x$ دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ كونها معرفة و متزايدة (مطردة)على نفس المجال

إن $f_2(x) = [x]$ د,ت,م على $[0,6]$ كونها معرفة و متزايدة (من التعريف) ايضا على نفس المجال

إن$f_3(x) = |x|$ د , ت , م على $[0,6]$ كون x د,ت,م على $[0,6]$ والقيمة المطلقة لها د,ت,م على$[0,6]$

إن $f_4(x) = \frac{1}{x}$ د,ت,م على $[0,6]$ كون x د,ت,م على $[0,6]$ و منه فإن مقلوبها د,ت,م على نفس المجال

$f_5(x) = -8$ دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ كونها دالة ثابتة

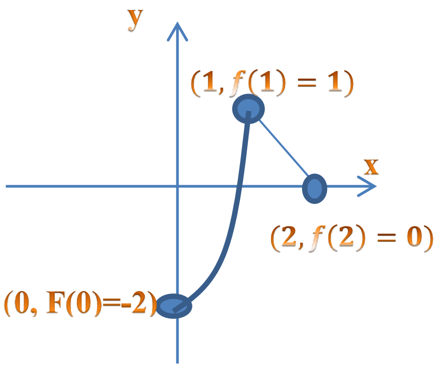
و منه فإن f دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ لأن جمع و طرح دوال ذات تغير محدود هو د,ت,م

-2 أوجد التغير الكلي للدالة f مع الرسم علما أن $f(x) = x - 2|x-1| : x \in [0,2]$

اي علينا إيجاد التغير الكلي $V_0^2 f$

الحل:

نلاحظ هنا أن لدينا في الدالة $f(x) = x - 2|x-1| : x \in [0,2]$ أن هنالك القيمة المطلقة لذلك سنناقش حالات الدالة وفق المجال $[0,2]$ أي أن:



$$f(x) = x - 2\begin{cases} x-1 & : \quad x-1 \geq 0 \\ -x+1 & : \quad x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2x + 2 : & 2 \geq x \geq 1 \\ x + 2x - 2 : & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

ومنه
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 : & 2 \geq x \geq 1 \\ 3x - 2 : & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

و منه الأن نستطيع حساب التغير الكلي للدالة f و ذلك بتجزئة الدالة لقسمين على المجال كوننا نلاحظ من الرسم أن الدالة غير مطردة و بتقسيمها يكون كل قسم مطرد (متزايد أو متناقص) حيث f متزايدة على المجال $[0,1]$ و f متناقصة على المجال $[1,2]$ ومنه

$$\bigvee_0^2 f = \bigvee_0^1 f + \bigvee_1^2 f = |f(1) - f(0)| + |f(2) - f(1)| = |1 - (-2)| + |0 - 1| = 3 + 1 = 4$$

و منه يتم المطلوب.

-3 أوجد التغير الكلي للدالة g على المجال $[0,2]$ حيث $g(x) = x^2 - 2x : x \in [0,2]$

الحل:

في هذا التمرين غير مطلوب منا ايجاد أن الدلة g دالة ذات تغير محدود و لكن سنوردها للإفادة :

يمكننا استخدام أكثر من طريقة لمعرفة فيما إذا كانت الدلة دالة ذات تغير محدود ام لا من معيار المشتق مثلا أو اذا كانت معرفة و مطردة على المجال أو فرق دالتين متزايدتين و لكن الطلب هنا إيجاد التغير الكلي للدالة (تفقد معايير من المحاضرة الرابعة)

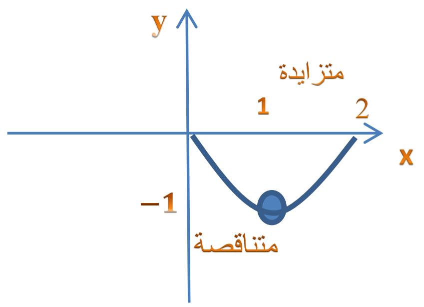
لنثبت أنها دالة ذات تغير محدود على $[0,2]$ ثم لنحاول إيجاد التغير الكلي للدالة g على نفس مجموعة التعريف

نلاحظ أن $g_1(x) = x^2$ دالة ذات تغير محدود على $[0,2]$ لأنها معرفة و متزايدة على المجال $[0,2]$

نلاحظ أن $g_2(x) = 2x$ دالة ذات تغير محدود على $[0,2]$ أيضا لأنها معرفة و متزايدة أيضا على المجال $[0,2]$ و منه g د,ت,م لأن طرح دوال ذات تغير محدود هي د,ت,م

و الان لنوجد $V_0^2 g$ نلاحظ ان $g'(x) = 2x - 2$ و بجعل $g'(x) = 0$ نجد أن $x = 1$

و منها $g(1) = 1 - 2 = -1$ و منه فإن



x	0	1	2
$g'(x)$	-------------	0	+++++++++
$g(x)$	0 ↘	-1	↗ 0

و لإيجاد التغير الكلي للدالg على المجال $[0,2]$ نقوم بتجزئة المجال ل $[0,1], [1,2]$

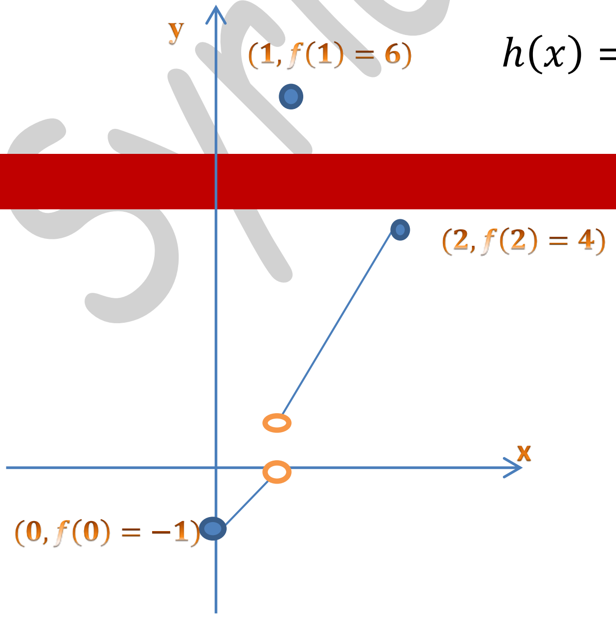
أي أن: $V_0^2 g = V_0^1 g + V_1^2 g = |g(1) - g(0)| + |g(2) - g(1)|$

$$= |-1 - 0| + |0 - (-1)| = 2$$

و منه يتم المطلوب.

4- أوجد التغير الكلي للدالة h على المجال $[0,2]$ حيث:

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 : 0 \le x < 1 \\ 6 : x = 1 \\ x^2 \quad : 1 < x \le 2 \end{cases}$$



الحل:

لنحاول رسم الدالة اولا لمعرفة هل هي مطردة أم لا

نلاحظ أن h متزايدة على $[0,1]$

و نعلم أن $V_0^2 h = V_0^1 h + V_1^2 h$

و منه كون h متزايدة عند المجال $[0,1]$ فإن:

$$\bigvee_0^1 h = |h(1) - h(0)| = |6 - (-1)| = 7$$

نلاحظ أن h غير مطردة على المجال $[1,2]$ لذلك لا بد من العودة الى التعريف لإيجاد التغير الكلي للدالة h على $[1,2]$

و الأن لنوجد التغير الكلي للدالة h عند $[1,2]$ و لنأخذ التجزئة P حيث $P \in \mathbb{P}[1,2]$:

$$P = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2\}$$

و لنأخذ المجموع $V(h,P) = \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})|$

$$V(h,P) = |h(x_1) - h(x_0)| + |h(x_2) - h(x_1)| + \cdots + |h(x_n) - h(x_{n-1})|$$

$$V(h,P) = |x_1^2 - 6| + |x_2^2 - x_1^2| + |x_3^2 - x_2^2| + \cdots + |4 - x_{n-1}^2|$$

نلاحظ أن $x_1 \in [1,2]$ ومنه $x_1^2 < 6 \Leftarrow |x_1^2 - 6| = 6 - x_1^2$

أما بالنسبة لباقي الحدود فإن فك القيمة المطلقة يبقى كما هو حسب التجزئة $x_2 < x_3 < \cdots$ و هكذا

$$V(h,P) = 6 - x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 + \cdots + 4 - x_{n-1}^2 = 10 - 2x_1^2$$

و منها فإن التغير الكلي يكون $\bigvee_1^2 h = \sup_{P\in\mathbb{P}[1,2]}[10 - 2x_1^2] = 8$ حيث أصغر قيمة تأخذها x_1 في المجال $[1,2]$ هي 1 و منه فإننا نجد

$$\bigvee_0^2 h = \bigvee_0^1 h + \bigvee_1^2 h = 7 + 8 = 15$$

و منه يتم المطلوب.

حل الوظائف المحاضرة 4:

التمرين 4: f معرفة على المجال $[0,1]$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) : x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad : \quad x = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. بين أن f مستمرة على $[0,1]$
2. بين أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ (بإستخدام المشتق)

الحل:

1- لإثبات أن f مستمر على $[0,1]$ يجب تحقق الشروط التالية:

1- $x_0 \in]0,1[$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ و ذلك كالاتي:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ < \\ >}} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = x_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{x_0}\right) = f(x_0)$$

2- $\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = f(0)$ و ذلك

كون $\sin(\frac{\pi}{x})$ محدودة و x^2 لا متناهية من

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 = f(0)$$

3- $\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = f(1)$ وذلك

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 = f(1)$$

أي أن f مستمرة على المجال $[0,1]$ و الأن لحل الطلب الثاني يجب الاعتماد على المشتق كما ذكر في نص التمرين إذا لنشتق الدالة و منه

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) : x \in]0,1[$$

$$|f'(x)| = \left|2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \le \left|2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| + \left|\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \le 2 + \pi$$

أي أن المشتق محدود على المجال $]0,1[$ و

$$x = 0 \Rightarrow f'(0+0) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0}{x} = 0$$ موجود و محدود

$$x = 1 \Rightarrow f'(1-0) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0}{x - 1} = \pi$$ موجود و محدود

(حسب أوبيتال)

و منه فإن f دالة ذات تغير محدود.

التمرين 5: اذا كانت f دالة معرفة على $[0\,,\frac{1}{2}]$بالشكل التالي:

$$f(x)\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln(x)} \;,\; x \neq 0\\ 0 \;,\; x = 0\end{cases}$$

المطلوب:

1. بين أن f مستمرة على $[0\,,\frac{1}{2}]$
2. بين أن f متزايدة على $[0\,,\frac{1}{2}]$
3. بين أن f دالة ذات تغير محدود على$[0\,,\frac{1}{2}]$
4. بين أن f لا يحقق شرط ليبشتز

الحل:

كي تكون f مستمرة على $[0\,,\frac{1}{2}]$ يجب أن تكون مستمرة عند كل نقطة من $]0\,,\frac{1}{2}[$ و مستمرة من اليمين عن الصفر و من اليسار عند$\frac{1}{2}$

أولا: $x_0 \in]0\,,1/2[\,:\ \lim\limits_{x \overset{<}{\underset{>}{\to}} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\underset{>}{\to}} x_0} -\frac{1}{\ln(x)} = -\frac{1}{\ln(x_0)} = f(x_0)$

ثانيا:$x_0 = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} -\frac{1}{\ln(x)} = 0 = f(0)$

ثالثا: $x_0 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = -\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(x)} = -\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = f\left(\frac{1}{2}\right)$

و منه فإن f مستمرة على المجال $[0,\frac{1}{2}]$

2- إن f متزايدة على $[0,\frac{1}{2}]$ لأن:

$$f'(x) = +\frac{1}{x.(\ln^2 x)} > 0 \ : x \in]0, \frac{1}{2}[$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1/2$
f'	$++++++++++++++++++++++++$
f	$0 \nearrow \frac{1}{ln2}$

3- بما أن f معرفة و متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$ فهي دالة ذات تغير محدود على نفس المجال و التغير الكلي هو

$$\bigvee_0^{\frac{1}{2}} f = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \left|\frac{1}{\ln(2)} - 0\right| = \frac{1}{\ln(2)}$$

4- إن f لا تحقق شرط ليبشتز لأن : حيث شرط ليبشتز

$$\exists L > 0 : |f(u) - f(v)| < L|u - v|, \forall u, v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

سوف نبين أن هذا الشرط لا يصح أي لا يوجد L يحقق المتراجحة السابقة من أجل قيمتين u, v

و سنختار $v = 0 \ and \ u \overset{>}{\to} 0$

حسب أوبيتال نحسب النهاية كون هنا حالة عدم تعين $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{\substack{> \\ u\to 0}} \frac{|f(u) - f(0)|}{|u - 0|} = \lim_{\substack{> \\ u\to 0}} \frac{-\frac{1}{\ln(u)}}{u} = -\lim_{\substack{> \\ u\to 0}} \frac{\frac{1}{u}}{\ln(u)} = -\lim_{\substack{> \\ u\to 0}} \frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u}} = \lim_{\substack{> \\ u\to 0}} \frac{1}{u} = +\infty$$

أي لا يوجد L بحيث يحقق $\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|} < L$ من أجل $u, v \in [0, \frac{1}{2}]$

التمرين 6:اذا كانت f معطاة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 3 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

أوجد $\bigvee_0^2 f$ مع الرسم بنفس طريقة التمرين (4) في الصفحة الثالثة من هذه المحاضرة.

انتهت المحاضرة

اعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد حايك البوشي