نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- حل تمرين و مبرهنات عن النقاط الملاصقة والحدية .

لنكمل حل الوظيفة :

3) $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} \subsetneq \bar{\mathbf{A}} \cap \bar{\mathbf{B}}$

(الحل)

$$\left.\begin{aligned} A \cap B &\subseteq A \\ A \cap B &\subseteq B \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1)\text{حسب} \left.\begin{aligned} \overline{A \cap B} &\subseteq \bar{A} \\ \overline{A \cap B} &\subseteq \bar{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

إن المساواة غير محققة بالضرورة ، ولنأخذ مثال على عدم المساواة

$$B =]0, \infty[\quad , \quad A =]-\infty, 0[$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{0\} \Leftarrow \bar{B} = [0, \infty[\quad , \quad \bar{A} =]-\infty, 0]$$

$$\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B} \Leftarrow \overline{A \cap B} = \emptyset \Leftarrow A \cap B = \emptyset$$

4) $\overline{x \backslash A} = x \backslash A^{\circ}$

ليكن $x \in \overline{X \backslash A} \Leftarrow x$ نقطة ملاصقة لـ $X \backslash A \Leftarrow \forall \varepsilon > 0 : N(x, \varepsilon) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$

ولنفرض جدلاً أن $x \in A^{\circ} \Rightarrow x \notin X \backslash A^{\circ}$ (متممة A°) ومنه : $\exists r > 0 : N(x, r) \subseteq A$

$$\emptyset \neq N(x, r) \cap (X \backslash A) \subseteq A \cap (X \backslash A) = \emptyset$$

مجموعة غير خالية محتواه في مجموعة خالية فهذا مستحيل

ومنه $x \in X \backslash A^{\circ}$, $\overline{x \backslash A} \subseteq X \backslash A^{\circ} \ldots\ldots\ldots (1)$

◆ ولنثبت الاحتواء المعاكس:

ليكن $x \in X\backslash A^\circ$ ولنبرهن أن x ملاصقة ل $X\backslash A$ نفرض جدلا أن x ليست نقطة ملاصقة ل $X\backslash A$

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0 : N(x,\varepsilon_0) \cap (X\backslash A) = \emptyset \;\Rightarrow N(x,\varepsilon_0) \subseteq A \;\Rightarrow x \in A^\circ$$

إذا x نقطة ملاصقة ل $X\backslash A$, $x \in X\backslash A \;\Leftarrow\; X\backslash A^\circ \subseteq \overline{x\backslash A} \ldots\ldots..(2)$

من ٢ و٣ نجد $X\backslash A^\circ = \overline{x\backslash A}$

<u>5) $X\backslash\bar{B} = (X\backslash B)^\circ$</u>

نختار من الجزء الثاني من هذا التمرين $A = x\backslash B$ ونعوض

$$\Rightarrow \overline{X\,\backslash(X\backslash B)} = X\,\backslash(X\backslash B)^\circ = \overline{(B^c)^c} = X\,\backslash(B^c)^\circ \Rightarrow \bar{B} = X\,\backslash(X\backslash B)^\circ$$
$$\Rightarrow X\,\backslash\bar{B} = (X\backslash B)^\circ$$

<u>6) $Fr\,A = \bar{A}\backslash A^\circ$</u>

$$Fr\,A = \bar{A} \cap \left(\overline{x\backslash A}\right) = \bar{A} \cap (x\backslash A^\circ) = \bar{A} \cap (A^\circ)^c = \bar{A}\backslash A^\circ$$

◆ **مبرهنة:** لتكن x نقطة ملاصقة ل A $\Leftrightarrow$ توجد متتالية من عناصر A متقاربة من x

<u>البرهان :</u> $(\Leftarrow)$بفرض أن x نقطة ملاصقة ل A فإن: $\forall \varepsilon > 0 : N(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

من أجل $\varepsilon = 1 \;\Rightarrow\; a_1 \in N(x,1) \cap A \neq \emptyset$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a_2 \in N\left(x,\frac{1}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; a_n \in N\left(x,\frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$$

أخذنا عنصر من كل مجموعة لنحصل على متتالية $\{a_n\}$ $\quad a_n \in N\left(x,\frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow a_n \in A\;,\; d(x,a_n) < \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \{a_n\} \subseteq A\;,\; 0 \le d(x,a_n) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow d(x,a_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \;\Rightarrow\; a_n \to x$$ وهو المطلوب

$(\Longrightarrow)$ ليكن لدينا المتتالية $\{a_n\}$ من عناصر A متقاربة من x :

$$a_n \to x \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in N^* : n \geq n_0 \implies d(x, a_n) < \varepsilon$$
$$\implies a_n \in N(x,\varepsilon)\,, a_n \in A \implies a_n \in N(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

ومنه x ملاصقة ل A

مبرهنة: لتكن A مجموعة مغلقة $\Leftrightarrow$ $A' \subseteq A$ (A') مجموعة النقاط الحدية

البرهان : $(\Longleftarrow)$ لتكن A مغلقة ولنفرض جدلا إن $b \in A'\ ,\ b \notin A$

متممة المجموعة A المغلقة مفتوحة $\implies b \in A' \implies \forall \varepsilon > 0 : N(b,\varepsilon) \cap (A \setminus \{b\}) \neq \emptyset$

$$b \notin A \implies b \in X \setminus A\ ,\quad \implies \exists r > 0 : N(b, r) \subseteq X \setminus A$$
$$\implies \emptyset \neq N(b,r) \cap (A \setminus \{b\}) \subseteq (X \setminus A) \cap A = \emptyset$$

فإن الفرض الجدلي خاطئ ومنه $b \in A \implies A' \subseteq A$

$(\Longrightarrow)$ لدينا $A' \subseteq A$ ولنثبت أن A مغلقة وذلك بإثبات أن $A^c = X \setminus A$ (متممتها) مفتوحة :

ليكن $x \in X \setminus A \implies x \notin A \implies x \notin A'$ x ليست نقطة حدية ل A

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : N(x,\varepsilon_0) \cap (A \{x\}) = \emptyset \implies N(x,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset \implies N(x,\varepsilon_0) \subseteq X \setminus A$$

ومنه $X \setminus A$ مفتوحة لأنه وجد كرة مفتوحة محتواه فيها $\Leftarrow$ A مغلقة

تمهيدية: ليكن (X,d) فضاء متري و $A \subseteq X$

1) $\bar{A}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحو ي A

2) $\bar{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

3) $\bar{A} = \bar{A} \cup A$

4) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $\bar{A} = A$

5) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

البرهان : لدينا X مجموعة مغلقة تحوي A فإن التقاطع المطلوب موجود ولنرمز لتقاطع كل المغلقات الحاوية ل A بالرمز K ولنبرهن أن $K = \bar{A}$

لتكن $x \in K$ ولنفرض جدلا أن $\exists \varepsilon_0 > 0 : N(x,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset \implies A \subseteq X \backslash N(x,\varepsilon_0) = F$

لكن الكرة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة إذا متممتها مغلقة $\Leftarrow F$ مغلقة وتحوي $A \Leftarrow x \in F$

$x \notin X\backslash N(x,\varepsilon) = F$ وهذا مستحيل ومنه لا يوجد $\varepsilon_0 > 0 : N(x,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset$

$$\forall \varepsilon > 0 : N(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \implies x \in \bar{A} \implies K \subseteq \bar{A} \ldots\ldots\ldots(1)$$

والاحتواء المعاكس: لتكن $x \in \bar{A}$ لنفرض جدلا أن F مغلقة وتحوي A , $x \notin F$ ومنه $x \in X\backslash F$ المجموعة المفتوحة .

$$\implies \exists \varepsilon > 0 , 0 \neq N(x,\varepsilon) \subseteq X\backslash F \implies N(x,\varepsilon) \cap A \subseteq (X\backslash F) \cap A = \emptyset$$

وهذا مستحيل ومنذ $x \in F$ حيث أن F مغلقة تحوي A

$$\implies x \in K \implies \bar{A} \subseteq \mathrm{K} \ldots\ldots(2)$$

من (2) و (1) $\bar{A} = K$

2) $\bar{A}$ مغلقة : لأن تقاطع المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة ، $\bar{A}$ أصغر مجموعة تحوي A

لأنه لو كان H مغلقة وتحوي A

$$\implies \bar{A} = \mathrm{K} = H \cap \{F : A \subseteq F \text{ و } F \neq H\} \implies \bar{A} \subseteq H$$

سنكمل حل التمرين في المحاضرة القادمة ......

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو && هديل سعيد && هالة مصطفى