◄ دكتور المادة: برلنت مطيط

◄ المحاضرة : الثانية

◄ عنوان المحاضرة : الحل العددي لجملة المعادلات الخطية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة

١ـ نظيم مصفوفة و العدد الشرطي
٢ـ الطرق المباشرة لحل جملة المعادلات الخطية (غاوس المعدلة و جوردان)
٣ـ المرتكز الجزئي و المرتكز الجزئي الدرجي

تناولنا في المحاضرة السابقة بعض التعاريف المهمة في عالم التحليل العددي و مبرهنة جيشغورين والأن سنكمل في أهمية أقراص جيشغورين ونظيم مصفوفة.

◄**ملاحظة :** إن إتحاد أقراص جيشغورين لمصفوفة مربعة A يحوي جميع القيم الذاتية الموافقة لهذه المصفوفة

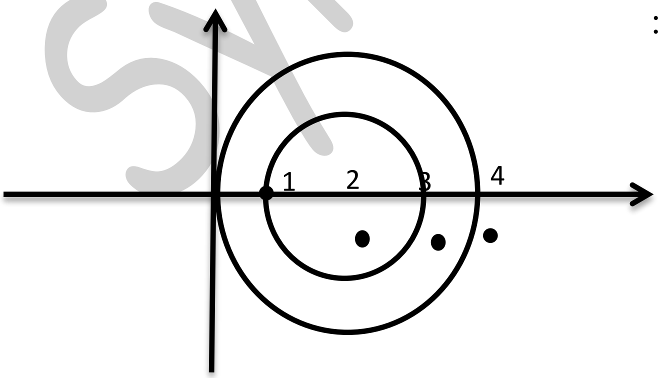
مثال إضافي: **أوجد حد أعلى للقيم الذاتية الموافقة للمصفوفة** ((يوضح أهمية الأقراص و الفائدة منها))

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

الحل : حسب الملاحظة (مبرهنة جيشغورين المحددة) فإن اتحاد جميع الأقراص

$$D_j\left(a_{jj}\,,d_j\right)=\left\{\left|a_{ij}-\lambda\right|\le d_j\ ;\ d_j=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left|a_{jk}\right|\ ;j=1,\dots,n\right\}$$

ستحوي جميع القيم الذاتية للمصفوفة A : لدينا $(n=4)$، ومنه :



$$j=1\Rightarrow |2-\lambda|\le 1\Rightarrow D_1(2{,}1)$$
$$j=2\Rightarrow |2-\lambda|\le 2\Rightarrow D_2(2{,}2)$$
$$j=3\Rightarrow |2-\lambda|\le 2\Rightarrow D_3(2{,}2)$$
$$j=4\Rightarrow |2-\lambda|\le 1\Rightarrow D_4(2{,}1)$$

لدينا $D_1=D_4$ ، $D_2=D_3$ وبالتالي سنمثل نقطتين فقط

$$D_1\cup D_2=D_2=D_2(2{,}2)\quad ;\ A\in D_2\Rightarrow 0\le\lambda<4$$

وهي $(\lambda=4)$ هو أعلى القيم الذاتية المصفوفة A ، حيث تفيد هذه المبرهنة في أيجاد **نصف القطر الطيفي**

نظيم مصفوفة و العدد الشرطي

يعرف نظيم شعاع بأنه التطبيق :

$$\|.\|: R^n \longrightarrow R^+ = [0,+\infty[$$

الذي يحقق الشروط التالية :

١. $\|x\| > 0 \text{ if } x \neq 0$ ٢. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

٣. $\|cx\| = |c|\|x\|$ ٤. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

أمثلة على نظائم الأشعة:

١) **نظيم القيمة المطلقة أو ℓ_1** : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

٢) **نظيم الإقليدي أو ℓ_2** : $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

٣) **نظيم الـ max أو L_∞ (اللانهاية)** : $\|x\|_\infty = \underbrace{\max}_{1\leq i\leq n} |x_i|$

مثال : فرض أنه لدينا الشعاع $x = \{1,3,-5,6\}$ أوجد $\|x\|_1, \|x\|_2$, $\|x\|_\infty$.

الحل :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 1 \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2} = 8.42$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty = \underbrace{\max}_{1\leq i\leq 4} \{|x_i|\} = 6$$

نظيم مصفوفة : يعرف نظيم مصفوفة بأنه تطبيق

$$\|.\|: M_{m\times n}(R) \longrightarrow R^+ = [0,+\infty[$$

الذي يحقق الشروط التالية :

1. $\|A\| > 0 \ \ if \ A \neq 0$

2. $\|cA\| = |c|\|A\|$

3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

◄ **ملاحظة** أن أي نظيم مصفوفة يحقق خاصية التماسك :

$$\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\| \quad \forall A,B \in M_n(R)$$

أمثلة عن نظائم المصفوفة

١) **النظائم المرتبة جزئيا لمصفوفة :**

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \qquad \text{(مصفوفة أعمدة)}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \{|\lambda_i|\}} \ ; \ \lambda_i \in \lambda(A^T.A)$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \qquad \text{(مصفوفة أعمدة)}$$

مثال احسب $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل : $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = max\{4,4,4\} = 4$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}} \;\; ; \;\; \lambda_i \in \lambda(A^T.A)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(AA^T - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.0616 \\ \lambda_2 = 5.0256 \\ \lambda_3 = 12.9128 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}} = \sqrt{12.9128} \approx 3.5934$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = max\{3,5,4\} = 5$$

مبرهنة : بفرض A مصفوفة مربعة عندئذ $\rho(A) \le \|A\|$ حيث $\|.\|$ نظيم مرتب جزئيا لمصفوفة A، أي لا يوجد قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة تتجاوز نظيم المصفوفة .

مبرهنة بفرض A مصفوفة مربعة عندئذ $\lim_{n\to\infty}\|A\|^n = 0$ إذا كان $\|A\| < 1$ أو إذا وفقط إذا $\rho(A) \le 1$.

العدد الشرطي لمصفوفة

بعض جمل المعادلات الخطية حساسة جدا لأخطاء التدوير أي إنه يمكن أن نحصل على حلول مختلفة تماما عن تدوير بعض عناصر الجملة، ندعو هذه الحالة **بالجملة المريضة** **(ill−condition system)**
ولمعرفة فيما أذا كانت جملة ما مريضة أم لا فإننا نعتمد على ما يسمى بالعدد الشرطي **لمصفوفة الأمثال**

سنعرفه كما يلي :

بفرض أن A مصفوفة مربعة وقابلة للقلب $(\det(A) \ne 0)$، عندئذ **يعرف العدد الشرطي** لهذه المصفوفة على أنّه

$$cond(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$$

حيث أن $\|.\|$ نظيم مرتب جزئياً للمصفوفة A (أحد الأنظم الأتية $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$)

مبرهنة : بفرض $A \in M_n(R)$ بحيث $\det(A) \ne 0$ وليكن $\|.\|$ نظيم مرتب جزئيا للمصفوفة A عندئذ :

١) $cond(A) = cond(A^{-1})$
٢) $cond(\alpha A) = \alpha\, cond(A)$
٣) $cond(I_n) = 1$
٤) $cond(A) > 0$

الجملة المريضة و الجملة الجيدة

بفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية $Ax = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ عندئذ :

- نقول عن هذه الجملة إنها مريضة إذا كان العدد الشرطي لمصفوفة الأمثال A كبير نسبياً .
- نقول عن هذه الجملة إنها جيدة إذا كان العدد الشرطي لمصفوفة الأمثال A صغير نسبياً .

◄ملاحظة غالبا ما تعتبر الجملة جيدة إذا كان $cond(A) \approx 1$ وخلاف ذلك تكون الجملة مريضة

((عندما $cond(A) > 1$ تعتبر جملة المعادلات مريضة))

تذكرة :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال : صفحة ((١٠٨))

بفرض $\varepsilon > 0$ (مقدار ثابت) ولتكن لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

المطلوب : ١) أوجد A^{-1} بالنسبة للنظيم ℓ_∞ على R^n .

٢) أوجد حدا أدنى للعدد الشرطي الموافق للمصفوفة A إذا علمت أن $\varepsilon \leq 0.01$.

الحل : ١)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -(1+\varepsilon) \\ -(1-\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1.1) - (1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = \varepsilon^2$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 2} \sum_{j=2}^{2} |a_{ij}| = max\{|1| + |1+\varepsilon| \,, |1-\varepsilon| + |1|\}$$

$$\|A\|_\infty = max\{2+\varepsilon \,, 2-\varepsilon\} = 2+\varepsilon$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

$$cond(A) = \|A\|_\infty . \|A^{-1}\|_\infty = (2+\varepsilon)\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon^2}\right)$$

$$cond(A) = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2$$

٢) نعوض قيمة ε ونرى قيمة العدد الشرطي $\quad \varepsilon \leq 0.01 \Rightarrow \varepsilon \leq 10^{-2}$

$$cond(A) = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \geq 4041$$

ومنه 4041 حد أدنى للعدد الشرطي لـ A وفق لنظيم ℓ_∞ ، أي أن العدد الشرطي كبير نسبيا فالجملة التي تكون A مصفوفة أمثالها مريضة .

طرائق حل جمل المعادلات الخطية

الطرائق المباشرة (الحل الفعلي) — الطرائق تكرارية (الحل تقريبي)

طرائق LU — طرائق غاوس — غاوس سيدل — طريقة S.O.R — جاكوبي

طرائق المباشرة لحل جملة المعادلات الخطية

بفرض لدينا جملة معادلات الخطية $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$، عندئذ:

١) إذا كانت $A = D$ أي أن مصفوفة الأمثال هي مصفوفة قطرية أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

عندئذ يعطى حل الجملة بالشكل :
$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}} \; ; \begin{cases} k = 1, \dots, n \\ a_{kk} \neq 0 \end{cases}$$

٢) إذا كانت $A = L$ (أي أن المصفوفة هي مصفوفة مثلثية سفلى) أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

عندئذ يعطى حل الجملة بالشكل :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_k = \dfrac{\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j\right)}{a_{kk}} \; ; \begin{cases} k = 2, \dots, n \\ a_{kk} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

وتدعى هذه الطريقة **بالتعويضات المتتالية الأمامية** .

٣) إذا كانت $A = U$ (أي أن مصفوفة الأمثال هي مصفوفة مثلثية عليا) أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

عندئذ يعطى حل الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k = \frac{(b_k - \sum_{j=K+1}^{n} a_{kj} x_j)}{a_{kk}} \end{cases} ; \begin{cases} k = n-1, \dots, 1 \\ a_{kk} \neq 0 \end{cases}$$

وتدعى هذه **بالتعويضات المتتالية التراجعية** .

طريقة غاوس المحسنة (المعدلة)

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية : $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$، لحل هذه الجملة بطريقة غاوس المحسنة أي إيجادX، نقوم بالخطوات التالية :

١) **نوسع مصفوفة الأمثال A**، وذلك بإضافة عمود الثوابت إلى هذه المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} = \left(\underbrace{A}_{I} : \underbrace{b}_{II} \right)$$

حيث أن A هي مصفوفة الأمثال و b هي مصفوفة الثوابت .

٢) **نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة مثلثية عليا** وذلك بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفارا وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية :

$$-\frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i + R_j \longrightarrow R_j \;\; ; \begin{cases} i = 1, \dots \dots, n-1 \\ j = i+1, \dots \dots, n \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

وبذلك نكون قد حولنا المصفوفة الموسعة لتصبح مكافئة لمصفوفة من الشكل :

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & \vdots & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a'_{nn} & \vdots & b'_n \end{pmatrix}$$

أي : $\quad (A|b) \xrightarrow{causs} (U|C)$

٣) **نحل الجملة الناتجة باستخدام طريقة التعويضات المتتالية التراجعية فنجد** :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b'_{n,n+1}}{a'_{n,n}} \\ x_i = \frac{a'_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j}{a'_{ii}} \end{cases} ; \begin{cases} i = n-1, \dots, 1 \\ a'_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

مثال (١) : ١- حل جمل المعادلات الأتية باستخدام طريقة غاوس المعدلة :

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4$$

الحل : إن المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات الخطية هي

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & \vdots & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

نصغر أولا العناصر التي تحت القطر الرئيسي في السطر الأول، نقوم بالتحويلات التالية :

$$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \quad , -R_1 + R_3 \longrightarrow R_3 \quad , -R_1 + R_4 \longrightarrow R_4$$

فتصبح المصفوفة الموسعة بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 12 \end{pmatrix}$$

الأن نصغر العناصر التي تحت عنصر القطر الرئيسي في السطر الثاني، فنقوم بالتحويلات التالية :

$$R_2 \longleftrightarrow R_3 \quad , \qquad 2R_3 + R_4 \longrightarrow R_4$$

فتصبح المصفوفة الموسعة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

بما أنها أصبح الجزء الأول مصفوفة مثلثية عليا فنتوقف عن القيام بالتحويلات ، وتصبح الجملة بالشكل :

$$\begin{cases} 2x_4 = 4 \Longrightarrow x_4 = 2 \\ -x_3 - x_4 = -4 \Longrightarrow -x_3 = -4 + x_4 \Longrightarrow x_3 = 4 - 2 = 2 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \Longrightarrow x_2 = \dfrac{6 - x_4 + x_3}{2} = \dfrac{6 - 2 + 2}{2} = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \Longrightarrow x_1 = -8 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -8 + 3 - 2(2) + 2 = -7 \end{cases}$$

ومنه نجد أن حل الجملة هو : $X = (-7 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 2 \ )^T$

مثال (٢) :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

الحل نأخذ المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&4\\2&2&1&\vdots&4\\1&1&2&\vdots&6\end{pmatrix}$$

نقوم بالتحويلات ، فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&4\\0&0&-1&\vdots&-4\\0&0&1&\vdots&2\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}-R_1+R_3\to R_3\\-2R_1+R_2\to R_2\end{matrix}$$

بما أنه تم تصغير جميع العناصر التي تقع تحت عناصر القطر الرئيسي ، نتوقف عن التحويل ، ونجد أن الجملة أصبحت :

$$\begin{cases}x_3=2\\-x_3=-4\Rightarrow x_3=4\\x_1+x_2+x_3=4\end{cases}$$

فنجد أن للمتغير x_3 له قيمتين و هذا مستحيل، بالتالي فإن الجملة مستحيلة الحل .

مثال (٣)

$$x_1+x_2+x_3=4$$
$$2x_1+2x_2+x_3=6$$
$$x_1+x_2+2x_3=6$$

الحل : نأخذ المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات :

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&4\\2&2&1&\vdots&6\\1&1&2&\vdots&6\end{pmatrix}$$

نقوم بالتحويلات فتصبح المصفوفة بالشكل

$$\bar{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&4\\0&0&-1&\vdots&-2\\0&0&1&\vdots&2\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}-R_1+R_3\to R_3\\-2R_1+R_2\to R_2\end{matrix}$$

بما انه تم تصغير جميع العناصر التي تقع تحت عناصر القطر الرئيسي، نتوقف عن التحويل ، ونجد أن الجملة أصبحت :

$$\begin{cases}x_3=2\\-x_3=-2\Rightarrow x_3=2\\x_1+x_2+x_3=4\Rightarrow x_2=4-x_1-x_3\Rightarrow x_2=4-2-x_1=2-x_1\end{cases}$$

نجد أن :

$$x_3=2\ ,x_2=2-x_1$$

نجد أن x_1 اختياري ، أذا للجملة عدد لا نهائي من الحلول .

مساوئ طريقة غاوس المحسنة

- الكلفة الحسابية العالية لهذه الطريقة حيث تبلغ هذه الكلفة $\frac{n^3}{3}$ من أجل n كبيرة جدا .
- لأنه يجب أن نحصل على المصفوفة العلوية (المثلثية العليا) أولا ثم نقوم بإيجاد القيم ، ويجب أن لا ننسى أن الهدف من الطرق العددي هو الحصول على حاسوبي، لذلك يجب أن ندرس الخوارزمية ونرى كلفتها، لأن من سيطبق هذه الخوارزميات هو الحاسوب.
- لا يمكن تطبيقها بشكل مباشر عندما يكون أحد عناصر القطر الرئيسي صفر .
- تعاني من حساسية عالية لأخطاء التدوير .

ملاحظة : إذا كان أحد عناصر القطر الرئيسي مساويا للصفر فإننا نقوم بإعادة ترتيب الأسطر بحيث نجعل جميع عناصر القطر الرئيسي غير مساوية للصفر وذلك قبل البدء بتطبيق غاوس المحسنة .

مثال (٤) : حل جملة المعادلات الأتية بطريقة غاوس المحسنة :

$$8x_2 + 2x_3 = -7$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$$

الحل : نأخذ المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 6 & 2 & 8 & \vdots & 26 \end{pmatrix}$$

بما أن $a_{11} = 0$، فلا يمكننا تطبيق طريقة غاوس المحسنة مباشرة لذلك نقوم بتحويل $R_1 \leftrightarrow R_2$
أي نقوم بالتبديل بين السطرين الأول والثاني (يمكننا المبادلة بالسطر الثالث بدلا من الثاني لكن للسهولة اخترنا الثاني)
فتصبح المصفوفة الموسعة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 6 & 2 & 8 & \vdots & 26 \end{pmatrix}$$

نقوم بالتحويل فتصبح المصفوفة بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 0 & -8 & 4 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \qquad -2R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$$

ثم نقوم بالتحويل فتصبح المصفوفة بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 2 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \qquad R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

ومنه نجد أن الجملة أصبحت بالشكل :

$$\begin{cases} 6x_3 = 3 \Longrightarrow x_3 = 0,5 \\ 8x_2 + 2x_3 = -7 \Longrightarrow x_2 = \frac{-7-2(0,5)}{8} = \frac{-7-1}{8} = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \Longrightarrow x_1 = \frac{8-5(-1)-2(0.5)}{3} = 4 \end{cases}$$

أي أن حل الجملة هو :

$$X = (4 \quad -1 \quad 0.5 \ )^T$$

طريقة غاوس جوردان

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$، لحل هذه الجملة بطريقة غاوس جوردان أي أيجادX، نقوم بالخطوات التالية :

١) **توسع مصفوفة الأمثال A** ، وذلك بإضافة عمود الثوابت إلى هذه المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} = \left(\underbrace{A}_{I} : \underbrace{b}_{II} \right)$$

حيث أن A هي مصفوفة الأمثال، و b هي مصفوفة الثوابت

٢) **نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\bar{A}$ إلى مصفوفة قطرية وذلك** :

*يجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفارا، وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية :

$$-\frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i + R_j \longrightarrow R_j \quad ; \begin{cases} i = 1, \dots\dots, n-1 \\ j = i+1, \dots\dots, n \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

*بجعل العناصر التي فوق القطر الرئيسي لـ A أصفارا، وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية :

$$-\frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i + R_j \longrightarrow R_j \quad ; \begin{cases} j = 1, \dots\dots, n-1 \\ i = j+1, \dots\dots, n \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

أي

$$(A|b) \xrightarrow{\text{Causs jordan}} (D|C)$$

٣) **نحل لجملة الناتجة** .

مثال (٣) حل جملة المعادلات الأتية بطريقة غاوس جوردان

$$x - y + 4z = 16$$

$$3x + 2y + z = 18$$

$$x + 4y - 2z = 12$$

الحل : نأخذ المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & \vdots & 16 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 18 \\ 1 & 4 & -2 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} -3R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \longrightarrow R_3 \end{array}$$

فتصبح المصفوفة بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & -11 & \vdots & -30 \\ 0 & 5 & -6 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \qquad -R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

فتصبح المصفوفة مثلثية عليا بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & -11 & \vdots & -30 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\frac{4}{5}R_3 + R_1 \longrightarrow R_1 \\ \frac{11}{5}R_3 + R_2 \longrightarrow R_2 \end{array}$$

فتصبح المصفوفة بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & -4.8 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 27.2 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \frac{1}{5}R_2 + R_1 \longrightarrow R_1$$

فتصبح المصفوفة الأمثال قطرية بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0.64 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 27.2 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 26 \end{pmatrix}$$

بما أنه أصبحت المصفوفة قطرية ، نتوقف عن التحويل

ونجد أن الجملة أصبحت :

$$\begin{cases} x = 0.64 \\ 5y = 27.2 \Rightarrow y = 5.44 \\ 5z = 26 \Rightarrow z = 5.2 \end{cases}$$

ومنه يكون الحل لهذه الجملة هو :

$$X = (0.64 \quad 5.44 \quad 5.2\ )^T$$

تمرين (١) صفحة (١٦١) من الكتاب

أوجد حل جملة المعادلات التالية :

$$2x + y + z = 10$$

$$3x + 2y + 3z = 18$$

$$x + 4y + 9z = 16$$

باستخدام طريقتي غاوس المحسنة وغاوس جوردان

- **غاوس المحسنة الحل :**

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 10 \\ 3 & 2 & 3 & \vdots & 18 \\ 1 & 4 & 9 & \vdots & 16 \end{pmatrix}$$

سنقوم بتحويل جزء الأمثال لهذه المصفوفة الى مصفوفة مثلثية عليا

يفضل عادةً أن يكون العنصر الأول(a_{11}) مساوياً للواحد لسهولة الحل ، لذلك سنقوم بالتبديل بي السطرين الأول والثالث، أي :

$$R_3 \leftrightarrow R_1$$

ومنه تصبح المصفوفة بالشكل

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \vdots & 16 \\ 3 & 2 & 3 & \vdots & 18 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$$

لتصغير العناصر التي تقع تحت العنصر (a_{11}) نقوم بالتحويلات التالية :

$$-3R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \qquad , \qquad -2R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$$

فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \vdots & 16 \\ 0 & -10 & -24 & \vdots & -30 \\ 0 & -7 & -17 & \vdots & -22 \end{pmatrix}$$

نبسط عناصر الثاني ونغير إشارة عناصر السطر الثالث وذلك عن طريق إجراء تحويلات

$$-\frac{1}{2}R_2 \longrightarrow R_2 \qquad , \qquad -R_3 \longrightarrow R_3$$

فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & 12 & \vdots & 15 \\ 0 & 7 & 17 & \vdots & 22 \end{pmatrix}$$

نصفر العناصر التي تقع تحت عنصر القطر الرئيسي الموجود في السطر الثاني (a_{22}) بالتحويل:

$$-\frac{7}{5}R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & 12 & \vdots & 15 \\ 0 & 0 & 0.2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots. (*)$$

أصبحت مصفوفة الأمثال مثلثية عليا ، فنتوقف عن التحويلات ، وتصبح جملة المعادلات بالشكل :

$$\begin{cases} 0.2z = 1 \Longrightarrow \frac{1}{5}z = 1 \Longrightarrow z = 5 \\ 5y + 12z = 15 \Longrightarrow y = \frac{15-12z}{5} = \frac{15-12(5)}{5} = -9 \\ x + 4y + 9z = 16 \Longrightarrow x = 16 - 9z - 4y = 16 - 9(5) - 4(-9) = 16 - 45 + 36 = 7 \end{cases}$$

ومنه نجد أن حل هذه الجملة هو

$$X = (\,7 \quad -9 \quad 5\,)^T$$

- **غاوس جوردان الحل :**

إن بداية الحل في هذه الطريقة هي نفس الطريقة السابقة ونكمل التحويلات على المصفوفة (*) إلى أن تصبح قطرية نتابع بالمصفوفة بعد إجراء تحويلات :

$$5R_3 \longrightarrow R_3$$

لتسهيل الحل فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & : & 16 \\ 0 & 5 & 12 & : & 15 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{pmatrix}$$

نصغر العناصر التي فوق العنصر (a_{33}) بإجراء التحويلات :

$$-12R_3 + R_2 \longrightarrow R_2 \quad , \qquad -9R_3 + R_1 \longrightarrow R_1$$

فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & : & -29 \\ 0 & 5 & 0 & : & -45 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{4}{5}R_2 + R_1 \longrightarrow R_1 \Rightarrow \bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 7 \\ 0 & 5 & 0 & : & -45 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{pmatrix}$$

فتصبح جملة المعادلات بالشكل

$$\begin{cases} x = 7 \\ 5y = -45 \Longrightarrow y = -9 \\ z = 5 \end{cases}$$

ومنه نجد أن حل هذه الجملة هو

$$X = (\,7 \quad -9 \quad 5\,)^T$$

تقنيات المرتكز

تدعى العناصر $\{a_{ii}\}_{1\le i\le n}$ في مصفوفة موسعة $\tilde{A}$ موافقة لجملة المعادلات خطية بالعناصر الرائدة $(pivots)$.

إذا كان أحد العناصر الرائدة على الأقل صغيرا نسبيا بالنسبة لعناصر عموده فإن طريقة غاوس المعدلة تفشل .

الأمر الذي يمكن توضيحه من خلال المثال التالي :

$$(\#) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} E_1: 0.003\, x_1 + 59.14\, x_2 = 59.17 \\ E_2: 5.291\, x_1 - 6.13\, x_2 = 46.78 \end{cases}$$

من الواضح أن حل هذه الجملة وفق الطرائق المباشرة هو : $x_1 = 10\,, x_2 = 1$

سنقوم فيما يلي بحل هذه الجملة باستخدام طريقة غاوس مع ملاحظة أن العنصر الرائد في العمود الأول 0.003 صغير نسبيا بالنسبة لبقية عناصر عموده.

إن المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي :

$$A = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & : & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & : & 46.78 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & : & 59.17 \\ 0 & -104300 & : & -104400 \end{pmatrix} \quad -\frac{5.291}{0.003} R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.6\overline{6} \approx 1764$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -104300\, x_2 \approx -104400 \Rightarrow x_2 \approx 1.001 \\ 0.003\, x_1 + 59.14\, x_2 \approx 59.17 \Rightarrow x_1 \approx \dfrac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003} = -10 \end{cases}$$

يمكننا بسهولة ملاحظة أن القيمة التقريبية لـ x_2 قريبة من القيمة الفعلية لـ x_2 بينما قيمة x_1 التقريبية بعيدة جدا عن قيمة x_1 الفعلية، وذلك لأن العنصر الرائد a_{11} صغير نسبيا بالنسبة إلى a_{21} ، مما يعني ان طريقة غاوس المعدلة تفشل .

وللتخلص من هذه المشكلة (الفشل الناتج عن كون أحد العناصر الرائدة صغير نسبيا بالنسبة لبقية عناصر عموده) يتم تطبيق أحد طرق تقنيات المرتكز التالية :

تقنيات المرتكز الجزئي

والتي تقوم على تطبيق الخطوات التالية على كل عمود يكون عنصره الرائد صغيرا نسبيا بالنسبة لبقية عناصر عموده.

١) **نختار أكبر عنصر (بالقيمة المطلقة) من العناصر الواقعة تحت العنصر الرائد لمصفوفة موسعة موافقة لجملة معادلات خطية أي :**

$$|a_{ik}| = max_{K \le j \le n} |a_{jk}|$$

حيث k رقم سطر العنصر الرائد، n عدد أسطر المصفوفة الموسعة.

٢) **نبدل السطر (i) والسطر(k)** أي : $R_i \longleftrightarrow R_k$
أي أننا نجعل العنصر الرائد هو العنصر الأكبر من العناصر التي تحته .

٣) **نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل .**

سنقوم فيما يلي بتطبيق تقنية المرتكز الجزئي لحل جملة المعادلات الخطية السابقة (#)

وجدنا أن المصفوفة :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & : & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & : & 46.78 \end{pmatrix}$$

ولاحظنا أن العنصر الرائد في العمود الأول $(a_{11} = 0.003)$ صغير نسبيا بالنسبة لبقية عناصر عموده وعليه :

$$max\{|a_{11}|\,,|a_{21}|\} = max\{|0.003|\,,|5.291|\} = |5.291| = |a_{21}|$$

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & : & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & : & 59.17 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1$$

لنطبق الأن طريقة غاوس المعدلة :

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & : & 46.78 \\ 0 & 59.14 & : & 59.14 \end{pmatrix} \quad -\frac{0.003}{5.291}R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \quad ; \frac{0.003}{5.291} = 0.000567$$

ومنه تصبح الجملة بالشكل :

$$\begin{cases} 59.14\,x_2 = 59.14 \Longrightarrow x_2 = 1 \\ 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \Longrightarrow x_1 = \dfrac{46.78 + 6.13(1)}{5.291} \end{cases}$$

ومنه نجد أن الحل التقريبي : $x_1 = 10\,, x_2 = 1$

الأمر الذي يعني أن تقنية المرتكز الجزئي قد ساعدتنا في تحسين طريقة غاوس المعدلة ، وذلك في حال كان أحد العناصر الرائدة صغيرا نسبيا بالنسبة لبقية العناصر .

تقنيات المرتكز الجزئي الدرجي

بفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية : $AX = b$ ، تدعى :

$\tilde{A} = [A|b]$: المصفوفة الموسعة الموافقة لهذه الجمل التي عدد أسطرها n.

تقوم تقنية المرتكز الجزئي الدرجي على تطبيق الخطوات التالية وذلك من أجل $j = 1,2, \dots\dots, n-1$

١- نوجد المجموعة :

$$\left\{S_i\,;\, S_i = max_{j\le k\le n}\{|a_{ik}|\}\right\}_{j\le k\le n}$$

وهي أكبر عنصر في كل سطر بالقيمة المطلقة (بالانتباه إلى تحقق الشروط $n \le i\,, k \le j$)

٢- نوجد :

$$max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

أي نقسم كل عنصر من عناصر العمود j بالقيمة المطلقة على أعظم عنصر في سطره ونأخذ صاحب أعظم قيمة .

ومن ثم : $\exists w \in Z^+ \;;\; max_{j\le i\le n}\left\{\dfrac{|a_{ij}|}{S_i}\right\} = \dfrac{|a_{wi}|}{S_w}$

أي بعد أيجاد العنصر الأكبر نذهب للسطر الناتج عنه وليكن هذا السطر هو w .

٣- نجري التحويل :

$$R_i \leftrightarrow R_w$$

أي بعد أيجاد السطر w الذي يحوي العنصر الأكبر نبدله مع السطر i(من أجل كل السطور).

٤- نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل

حيث سنقوم بتصغير كافة العناصر التي تقع تحت عناصر القطر الرئيسي في كل عمود (من أجل كل j) ، ثم نحل الجملة.

مثال : حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة غاوس المعدلة وتقنية المرتكز الجزئي :

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -1$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$6x_1 + 8x_2 - x_3 = 35$$

الحل : أن المصفوفة الموسعة للجملة السابقة هي :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & \vdots & -1 \\ -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 6 & 8 & -1 & \vdots & 35 \end{pmatrix}$$

الخطوة الأولى (من أجل $j = 1$ العمود الأول) :

نوجد المجموعة : $\{S_i \; ; \; S_i = max_{1\le k\le 3}\{|a_{ik}|\}\}_{1\le i\le 3}$

العنصر الأكبر في السطر الأول : $max_{1\le k\le 3}\{|a_{1k}|\} = 5$

العنصر الأكبر في السطر الثاني : $max_{1\le k\le 3}\{|a_{2k}|\} = 3$

العنصر الأكبر في السطر الثالث : $max_{1\le k\le 3}\{|a_{3k}|\} = 8$

$$\Longrightarrow \{5,3,8\}$$

◄ملاحظة لا نهتم إلى العناصر الموجودة في قسم الثوابت إنما فقط ننظر إلى العناصر من مصفوفة الأمثال .

الأن لنوجد :

$$max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

أولا نوجد المجموعة :

$$\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}_{1\le i\le 3}$$

وهنا من أجل $j = 1$ أي أننا نقسم كل عنصر من عناصر ممن عناصر العمود الأول بالقيمة المطلقة على أعظم عنصر من عناصر سطره بالقيمة المطلقة (والتي أوجدناها سابقا).

$$\frac{|a_{11}|}{S_1}=\frac{3}{5} \quad , \quad \frac{|a_{21}|}{S_2}=\frac{3}{3}=1 \; , \quad \frac{|a_{31}|}{S_3}=\frac{6}{8}$$

$$\Longrightarrow\left\{\frac{3}{5}\,,1\,,\frac{6}{8}\right\}$$

نوجد الأن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة :

$$max\left\{\frac{3}{5}\,,1\,,\frac{6}{8}\right\}=1=\frac{|a_{21}|}{S_2}$$

أن هذا العنصر قد نتج من السطر الثاني أي أن $w=2$، ولدينا $j=1$، إذا نقوم بالتحويل : $R_1\leftrightarrow R_2$
وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}$ بالشكل :

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 3 & -4 & 5 & \vdots & -1\\ 6 & 8 & -1 & \vdots & 35\end{pmatrix}$$

نطبق غاوس المعدلة من أجل العمود الأول (تصغير العناصر التي تحت القطر الرئيسي من العمود الأول) :
فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -2 & 6 & \vdots & 0\\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}R_1+R_2\longrightarrow R_2\\ 2R_1+R_3\longrightarrow R_3\end{matrix}$$

الخطوة الثانية (من أجل $j=2$ العمود الثاني):
بعد أن انتهينا من السطر الأول الأن عملنا فقط على السطرين الثاني والثالث .
نوجد المجموعة : $\left\{S_i^{`}\,;\,S_i^{`}=max_{2\le k\le 3}\{|a_{ik}^{*}|\}\right\}_{2\le i\le 3}$

العنصر الأكبر في السطر الثاني : $max_{2\le k\le 3}\{|a_{2k}^{*}|\}=6$
العنصر الأكبر في السطر الثالث : $max_{2\le k\le 3}\{|a_{3k}^{*}|\}=12$

$$\Longrightarrow\{6\,,12\}$$

نوجد الأن

$$\left\{\frac{|a_{i2}^{*}|}{s_i^{`}}\right\}_{2\le i\le 3}$$

وهنا من أجل $j=2$ أي أننا نقسم كل عنصر من عناصر ممن عناصر العمود الثاني بالقيمة المطلقة على أعظم عنصر من عناصر سطره بالقيمة المطلقة (والتي أوجدناها مسبقا) باستثناء عنصر السطر الأول .

$$\frac{|a_{22}^{*}|}{S_2^{`}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{|a_{32}^{*}|}{S_3^{`}}=\frac{12}{12}=1$$

$$\Longrightarrow\left\{\frac{1}{3}\,,1\right\}$$

نوجد العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة :

$$max\left\{\frac{1}{3}\ ,1\right\} = 1 = \frac{|a^*_{32}|}{S_3^{`}}$$

أن هذا العنصر قد نتج من السطر الثالث أي أن $w = 3$، ولدينا $j = 2$، إذا نقوم بالتحويل : $R_3 \leftrightarrow R_2$
و عليه تصبح المصفوفة بالشكل :

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37 \\ 0 & -2 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

نطبق غاوس المعدلة من أجل العمود الثاني (نصغر العناصر التي تحت عناصر القطر الرئيسي من العمود الثاني)
فتصبح المصفوفة بالشكل :

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37 \\ 0 & 0 & \frac{37}{6} & \vdots & \frac{37}{6} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

ومنه تصبح الأن الجملة :

$$\begin{cases} \frac{37}{6}x_3 = \frac{37}{6} \Longrightarrow x_3 = 1 \\ 12x_2 + x_3 = 37 \Longrightarrow x_2 = \frac{37-x_3}{12} = \frac{36}{12} = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \Longrightarrow x_1 = \frac{1-x_2-2x_2}{-3} = -\frac{6}{-3} = 2 \end{cases}$$

ومنه حل جملة المعادلات السابقة هو :

$$X = (2 \quad 3 \quad 1)^T$$

ملاحظة عندما يكون $(w = j)$ فإننا لا نقوم بتبديل الأسطر .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – شهناز طاطيش – عبد الرحمن البحش