نظري

◄ دكتورة المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: التاسعة   عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية بطريقة لابلاس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-سوف ندخل بفصل جديد وهو تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية

تحويل لابلاس : ليكن لدينا الدالة $f(t)$ التابعة للمتغير t و هو الزمن عندئذ لإيجاد الحل سنجري التحويل (تحويل لابلاس) من $f(t)$ إلى $F(s)$ حيث s متغير آخر لدالة التحويل وهو ناتج عن التحويل ويكون التحويل عن طريق إجراء التكامل التالي :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \;\; : s > 0 \quad , \qquad t \geq 0$$

كما أننا نقول عن الدالة $f(t)$ أنها من مرتبة أسية إذا كان T كبير بشكل كافٍ حيث أن

$$t \geq T$$

وكان بالإمكان إيجاد الثابتين μ , α يحققان العلاقة $|f(t)| < \mu e^{\alpha t}$

مبرهنة:

١) إذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة قطعياً على المجال $[0,\infty[$ وإذا كانت $f(t)$ من مرتبة أسية فإن تحويل لابلاس ل $f(t)$ موجود.

٢) إذا كان تحويل لابلاس متقارباً بإطلاق من أجل $S = S_0$ عندئذ إن تحويل لابلاس متقارباً بإطلاق من أجل جميع قيم $S > S_0$

معلومة!!!!

دالة مستمرة قطعياً على مجال أي يوجد ضمن هذا المجال نقاط تكون الدالة غير مستمرة عند هذه النقاط.

بعض الخواص لتحويل لابلاس:

$A)\ L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s):\alpha,\beta\epsilon R\ \ \&\&S>0$

تحويل لابلاس يحقق الخاصية الخطية

بعض القوانين لتحويلات لابلاس للدوال الشهيرة :

$$1)\ \ L[A]=\frac{A}{S}:A\in R\ \ \&\&\ S>0$$

$$2)l[e^{at}]=\frac{1}{S-a}\quad : \ S>0\,;S>a$$

$$3)\ L[sin(at)]=\frac{a}{S^2+a^2}\quad :S>0$$

$$4)\ L[cos(at)]=\frac{S}{S^2+a^2}:S>0$$

$$5)L[sh(at)]=\frac{a}{S^2-a^2}\quad :\ \ S>a$$

$$6)\ \ L[ch(at)]=\frac{S}{S^2-a^2}:S>a$$

$$7)L[t^n]=\frac{n!}{S^{n+1}}\quad :\quad n\in\mathbb{N}^*\,;S>0$$

$8)L[f'(t)]=SF(s)-f(a)\ \ :f'=\frac{df}{dt}$ وهي خاصة المفاضلة من الدرجة الأولى

9$)L[f"(t)]=S^2F(s)-Sf(a)-f'(a)$ & **10**$)L[\frac{\partial f}{\partial t}]=SF(x,s)-f(x,0)$

$$11)\ L\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right]=S^2F(x,s)-Sf(x,0)-f'(x,0)$$

ملاحظة: هنا ضفنا متغير جديد لأنه مشتق جزئي أي يوجد أكثر من متغير أحدهم s والآخر ليكن x
لأنه في حالة الاشتقاقات الجزئية يكون تعاملنا مع أكثر من متغير خلافاً عن الاشتقاق التام الذي يكون المتحول واحد.

12) $L\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]=\frac{\partial F(x,s)}{\partial x}$ && **13)** $L\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial^2 F(x,s)}{\partial x^2}$

14) $L[t^n f(t)]=\frac{(-1)^n d^n F(s)}{dS^n}$ && **15)** $L[e^{at}f(t)]=F(S-a)\quad : S>a$

أما التحويل العكسي لتحويل لابلاس إذا كان $L\left[f(t)\right]=F(s)$ فإن $L^{-1}[F(s)]=f(t)$ يدل على التحويل العكسي لتحويل لابلاس.

ملاحظة : في المشتقات الجزئية ضفنا متغير جديد لانه يوجد اكثر من متغير وليكن احدهم s وليكن الاخر x على عكس الاشتقاق التام الذي يكون فيه متغير واحد.

الأمثلة :

1) $f(t)=1$

$$L[1]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=-\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^\infty=-\frac{1}{s}[0-1]=\frac{1}{s}$$

2) $f(t)=2=L[2]=\int_0^\infty 2e^{-st}dt=2\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{2.1}{s}$

3) $f(t)=3e^{-6t}=L[3e^{-6t}]=3L[e^{-6t}]=3\frac{1}{s-a}=\frac{3}{s+6}=F(s)$

4) $f(t)=2t^2=L[2t^2]=2L[t^2]=2\frac{n!}{s^{n+1}}=2\frac{2!}{s^{2+1}}=2\frac{2}{s^3}=\frac{4}{s^3}=F(s)$

5) $L[4cos7t]=4L[cos7t]=4\frac{s}{s^2+a^2}=\frac{4s}{s^2+49}=F(s)$

$6) L[\sin \pi t] = \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} = F(s)$

$7) L[e^{3t} \sin 4t] \Rightarrow F(s) = L[\sin 4t] = \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{4}{s^2 + 16}$: حسب الخاصة 15 فان

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a) \Rightarrow L[e^{3t} \sin 4t] = \frac{4}{(s-a)^2 + 16}$$

$8) L[t^2 e^{-3t}] \Rightarrow F(s) = L[e^{-3t}] = \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s+3}$

$L[t^2 e^{-3t}] = (-1)^2 \frac{d_2 F(s)}{ds^2} = F''$

$F(s) = \frac{1}{s+3} \Rightarrow F''(s) = \frac{2}{(s+3)^3} \Rightarrow L[t^2 e^{-3t}] = \frac{2}{s+3}$

طريقة ثانية للحل : $L[t^2 e^{-3t}] = F(s-a)$ حيث ان $f(t) = t^2$ ومنه

$F(s) = L[t^2] = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{2}{s^3} \Rightarrow L[t^2 e^{-3t}] = \frac{2}{(s+3)^3}$

$9) L[t \sin(2t)] = (-1)^1 \frac{dF(s)}{ds} \dots\dots\dots (\#)$: حيث $F(s)$ هو تحويل لابلاس للتابع

$f(t) = \sin(2t) \;\&\&\; F(s) = L[\sin(2t)] = \frac{2}{S^2 + 4} \;\&\&\; \frac{dF(s)}{ds} = -\frac{4S}{(S^2 + 4)^2}$

نعوض في (#) ومنه : $L[t\sin(2t)] = \frac{4S}{(S^2+4)^2}$

$10) L[t^2 \sin 2t] = (-1)^n \frac{d_n F(s)}{ds^n} = (-1)^2 \frac{d_2 F(s)}{ds^2} = F''(s)$

$F(s) = L[\sin 2t] = \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow F''(s) = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3} \Rightarrow L[t^2 \sin 2t] = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$

$11) L[te^t] = F(S-a) = F(S-1)$: حيث هنا طبقنا

$$L[f(t)e^{at}] = F(S-a) : f(t) = t$$

وكما أخذنا سابقاً $L[f(t)] = F(s) \;\&\&\; L[t] = F(s) = \frac{1!}{s^{1+1}} = \frac{1}{s^2}$

$$\Rightarrow F(s-a)=\frac{1!}{(S-a)^{1+1}}=\frac{1}{(S-a)^2}\xrightarrow{\text{وهكذا نستنتج أن}} L[te^t]=\frac{1}{(S-1)^2}$$

يتوجب علينا حفظه كتحويل لابلاس شهير هو وتحويله العكسي الآتي:

نستخدم في حل المعادلات التفاضلية كتحويلات شهيرة : $L^{-1}\left[\frac{1}{(S-a)^2}\right]=te^{at}$

مسائل الشروط للمعادلات التفاضلية العادية باستخدام لابلاس :

لحل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية :

١- نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية العادية
٢- نحصل على معادلة بالنسبة لتحويل لابلاس ثم نحل هذه المعادلة بالنسبة ل $Y(s)$
٣- نأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة فنحصل على حل المعادلة التفاضلية العادية

علماً أن : $L[y]=Y(s)$

$$L[y']=sY(s)-y(0) \qquad \& \qquad L[y'']=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

تمرين: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''-2y'+y=4$

التي تحقق الشروط الابتدائية : $y'(0)=2 \ \ \&\& \ \ y(0)=4$

الحل:

نطبق الخطوات (التي تناولناها في الفقرة السابقة)

نأخذ تحويل لابلاس لأطراف المعادلة :

$$L[y''-2y'+y]=L[4]\xrightarrow{\text{وكون تحويل لابلاس يحقق الخاصة الخطية}} L[y'']-2L[y']+L[y]=L[4]$$

$$\underbrace{S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)}_{L[y'']}-2\underbrace{\big(SY(s)-y(0)\big)}_{L[y']}+Y(s)=\frac{4}{S}$$

$$S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)-2SY(s)+2y(0)+Y(s)=\frac{4}{S}$$

نقوم بإصلاح المعادلة (نعوض القم الابتدائية وإخراج عامل مشترك إن وجد):

$$Y(s)[S^2-2S+1]-4S-2+8=\frac{4}{S}\rightarrow Y(s)(S-1)^2=4S-6+\frac{4}{S}$$

$$Y(s)(S-1)^2=\frac{4S^2-6S+4}{S}\rightarrow Y(s)=\frac{4S^2-6S+4}{S(S-1)^2}$$

وبالتالي يمكن تفريق الكسر السابق إلى ثلاثة كسور كما تعلمنا في مقرر تحليل (٢) ^_^:

$$\frac{4S^2-6S+4}{S(S-1)^2}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S-1}+\frac{C}{(S-1)^2}\quad \dots\dots\dots\dots(*)$$

نوحد المقامات ونطابق الكسرين ومنه :

$$\frac{A(S-1)^2+BS(S-1)+CS}{S(S-1)^2}=\frac{A(S^2-2S+1)+B(S^2-S)+CS}{S(S-1)^2}$$

$$=\frac{S^2(A+B)+S(-2A-B+C)+A}{S(S-1)^2}\xRightarrow{\text{نطابق أمثال } S^2 \text{ في الطرف الأيمن مع أمثال } S^2 \text{ في الطرف الأيسر}}$$

$$A+B=4\ \dots\dots\dots(1)\ \ \&\&\ -2A-B+C=-6\dots\dots\dots(2)$$

$$A=4\dots\dots\dots(3)\xRightarrow{\text{نعوض}(3)\text{في}(1)}B=0\xRightarrow{\text{نعوض في }(3)\ A=4\ \&\ B=0}C=2$$

نعوض الثوابت في $(*)$ نجد $\frac{4S^2-6S+4}{S(S-1)^2}=\frac{4}{S}+0+\frac{2}{(S-1)^2}$

الخطوة الأخيرة نجري تحويل لابلاس العكسي للحصول على الحل :

$$L^{-1}[Y(s)]=4L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{(S-1)^2}\right]\ \&\&\ y(t)=4+2te^t$$

انتهت المحاضرة

إعداد: علا الدالاتي ♥ بسمة نص الله ♥ دعاء الرحيل

تنسيق: ولاء الأخضر ♥