نظري

◄ دكتور المادة : ملك مارديني

◄ المحاضرة : الثامنة

عنوان المحاضرة : دوال بيسل التفاضلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-تعريف دوال بيسل التفاضلية

٢-كيفية حل المعادلات التفاضلية باستخدام دوال بيسل

لنبدأ أصدقائي ^_^

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية من الشكل :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

حيث أن v عدد ثابت عندئذ تسمى حلول المعادلة بجوار النقطة $x_0 = 0$ **بدوال بيسل التفاضلية**

حسب مادرسنا سابقاً للمعادلة التفاضلية السابقة فإن $x_0 = 0$ نقطة شاذة نظامية وبالتالي يكون الحل العام لها من الشكل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda}$ وكونه حل للمعادلة فهو يحقق المعادلة ومنه

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-1} \to y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض كلاً من y, y', y'' بالمعادلة فنجد.........

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y - v^2y = 0$$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda} - v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda} = 0$$

لنصلح الشكل الأن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda}=0$$

$$\xrightarrow{\text{نقسم على } x^{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_n x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n}=0$$

لتوحيد القوى نبدل في المتسلسلة (٣) كل n ب $(n-2)$ ومنه نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_n x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n}+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2} x^{n}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-v^2\right)C_n\right]x^n+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^n=0$$

كتبنا المتسلسلات السابقة على شكل مجموع لمتسلسلتين الأولى تبدأ من الصفر والثانية من 2

لتوحيد الحدود الدنيا نفك من المتسلسلة الأولى الحد $\mathbf{n=0}$ && $\mathbf{n=1}$

لنضع المتسلسلتان تبدآن من الحد $n=2$

$$\left((0+\lambda)(0+\lambda-1)+(0+\lambda)-v^2\right)C_0+\left((\lambda+1)(1+\lambda-1)+(1+\lambda)-v^2\right)C_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+\lambda)^2-v^2\right)C_n+C_{n-2}\right]x^n=0$$

$$(\lambda^2-v^2)C_0+\left[(\lambda+1)^2-v^2\right]C_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+\lambda)^2-v^2\right)C_n+C_{n-2}\right]x^n=0$$

بالمطابقة مع الطرف الثاني فإن:

١) الثوابت معدومة

٢) أمثال الدرجة الأولى ل x معدومة

٣) أمثال الدرجة n ل x معدومة أيضاً

$$(\lambda^2 - v^2)C_0 = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$((\lambda+1)^2 - v^2)C_1 = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$((n+\lambda)^2 - v^2)C_n + C_{n+2} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

من (١) يكون $C_0 \neq 0$ شرطاً سابقاً ومنه $\lambda^2 = v^2 \rightarrow \lambda_1 = v \,\&\, \lambda_2 = -v$

من (٢) يكون $((1+\lambda)^2 - v^2)C_1 = 0 \Rightarrow (1+\lambda)^2 - v = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \,\&\, C_1 = 0$

وهذا باعتبار $\lambda = v$ اما القوس معدوم عند $\lambda = -\frac{1}{2}$ او ان C_1 هو المعدوم

ومن (٣) نجد أن $C_n = -\frac{C_{n-2}}{(n+\lambda)^2 - v^2} \Rightarrow C_n = -\frac{C_{n-2}}{(n+\lambda+v)(n+\lambda-v)}$.. حيث ان $n \geq 2(\#)$

وهي العلاقة العامة التي ستعطينا علاقة تكرارية خاصة من أجل كل قيمة ل λ (أي $\lambda_1 \,\&\&\, \lambda_2$)

من أجل $v > 0$ وليس عدد صحيح نأخذ الجذر الأكبر $\lambda_1 = v$ نعوض في العلاقة التكرارية(#)

ومنه $C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n+2v)}$ ونلاحظ من أجل $n = 3$ أنه $C_3 = -\frac{C_1}{3(3+2v)}$

وأيضا من أجل $n = 5$ نجد $C_5 = -\frac{C_3}{5(5+2v)} = \frac{C_1}{15(5+2v)}$

نلاحظ أن جميع الثوابت ذات أدلة فردية وتتعلق بالثابت $C_1 = 0$ يكون لدينا $C_1 = C_3 = C_5 = \cdots 0$

$$\Rightarrow C_k = 0 : k = (2t+1) : t \in \mathcal{N}$$

الآن نبدل كل (n) ب (2n) وذلك لاستنتاج قيم الثوابت ذات الأدلة الزوجية

$$C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{2n(2n+2v)} \to C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{4n(n+v)} \quad : n \geq 1$$

وبتعويض قيم n نستنتج مايلي :

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n!\,(n+v)(n+v-1)\ldots\ldots(2-v)(1+v)} C_0$$

لنفرض أن C_0 هي المقدار الثابت أي $\boldsymbol{C_0 = \frac{1}{2^v\Gamma(1+v)}}$

ونعوض C_0 بعلاقة C_{2n} ومنه

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!\,(n+v)(n+v-1)\ldots\ldots(1+v)} \cdot \frac{1}{2^v\Gamma(1+v)} \to$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}2^v n!\,\Gamma(n+v+1)}$$

ولاننسى أن $\boldsymbol{\Gamma(n+v+1) = (n+v)(n+v-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(1+v)\Gamma(1+v)}$

ومنه نعوض الثوابت في الحل العام حيث $\lambda = v$

$$y_1 = J_v(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^v \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} = x^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n.\,2^v.\,n!\,.\,\Gamma(n+v+1)}$$

$$y_1 = J_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\;\Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

وتدعى دالة بيسل من النوع الأول من المرتبة v

واذا كان v ليس عددا صحيحا او صفرا نعوض $\lambda_2 = -v$ في العلاقة التكرارية (#)

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n-2v)} \quad ; n \geq 2$$

بما ان $C_1 = 0$ اذا $C_3 = C_5 = \cdots = 0$

$$C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{2n(2n-2v)} = -\frac{C_{2n-2}}{4n(n-v)} \quad ; n \geq 1$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n!\,(n-v)(n-v-1)\dots(1-v)} C_0$$

نختار قيمة $C_0 = \frac{1}{2^{-v}\Gamma(1-v)}$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n!\,(n-v)(n-v-1)\dots(1-v)} \cdot \frac{1}{2^{-v}\Gamma(1-v)}$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n 2^{-v} n!\ \Gamma(n-v+1)} \quad ; \quad n \geq 1$$

نعوض $\lambda_2 = -v$ في الحل العام :

$$y_2 = J_{-v}(2) = x^{-v}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{2n} = x^{-v}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n 2^{-v} n!\,\Gamma(n-v+1)} x^{2n} \rightarrow$$

$$y_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول من المرتبة $-v$

ومنه الحل العام لمعادلة بيسل حيث:

$$v > 0 \ \&\&\ v \notin Z$$

$$y = A\,J_v(x) + B\,J_{-v}(x)$$

حالات خاصة :

١) في حالة $v = 0$ تصبح المعادلة $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ ويكون الحل كالتالي :

من المرتبة صفر $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

٢) في حالة v عدد صحيح:

$$y_1 = J_v\left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+v-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$y_2 = J_{-v}(x) + aJ_v(x)\,ln|x|$$

وهي دالة بيسل من النوع الثاني

انتهت المحاضرة

"التفاؤل وقت الفشل ذكاء.... والثقة في النفس عند اليأس قوة.... والاصرار رغم المعوقات هو نجاح بحد ذاته "

إعداد: بسمة نص الله☺علا الدالاتي☺دعاء الرحيل