نظري

◄ دكتورة المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : الثالثة ◄ عنوان المحاضرة: التابع الأسي العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-خواص التابع الأسي العقدي
٢- الجزء الحقيقي و التخيلي للتابع الأسي و العقدي
٣-التمثيل الهندسي للتابع الأسي العقدي

خواص التابع الأسي العقدي :

١- هو الممدد التحليلي للتابع الأسي الحقيقي إلى مستوي **العقدي** لأن e^x تحليلي على C
و بالتالي إننا نعني أنّ: $e^z|_R = e^x$ ((مقصور e^z على $\mathbb{R}$ هو e^x))

تذكر : ليكن لدينا التابع $f: A \to B$ الذي يصور كل عنصر $x \in A$ بالعنصر $f(x) \in B$ عندئذٍ كل تابع معرف على مجموعة جزئية من A و لتكن $D \subseteq A$ (منطلقه D محتوى في منطلق f) و له نفس قاعدة ربط f هو مقصور للتابع f على D.

مثال : ليكن لدينا التابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قاعدة ربطه $f(x) = x^2$ ، إن التابع $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ و الذي قاعدة ربطه $g(x) = x^2$ هو مقصور للتابع f على المجموعة $D = \mathbb{R}^+$ لأنه تابع منطلقه مجموعة جزئية من منطلق f و له نفس قاعدة ربط f.

و نقول أن f ممدد لـ g على R) يعمم ذلك على R^2 و من ثم C)

٢- يحقق المساواة التالية

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2} \quad : \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

هناك طريقتان للإثبات :

ط١) قد أثبتنا صحة هذه المساواة في التحليل العقدي (١) بـ جداء كوشي .

ط٢) بالاستفادة من المبرهنة التالية :

إذا كان f قابلاً للاشتقاق على منطقة وكان $f'(z) = 0$ لأجل كل z من A فإن $f(z) = c$ حيث c ثابت عقدي .

ملاحظة : إذا كان المشتق لتابع حقيقي معدوماً على مجال مفتوح فإن هذا التابع سيكون ثابت على هذا المجال .

الإثبات

لنأخذ التابع $f(z) = e^z . e^{a-z}$

و نعلم أنّ $e^{g(z)}$ تحليلي عندما يكون $g(z)$ تحليلي ، و بالتالي لنوجد المشتق:

$$f'(z) = e^z . e^{a-z} - e^z . e^{a-z} \quad : \forall z \in \mathbb{C}$$

ومنه f ثابت على $\mathbb{C}$ أي أن $f(z) = c$ لاجل كل $z \in \mathbb{C}$

و نلاحظ أنّه عندما $z = 0$ فإن $f(0) = c$ ومنه $e^0 . e^{a-0} = c$

أي $e^a = c$ وبالتالي $e^z . e^{a-z} = e^a$

لنضع $z = z_1$ ، $a = z_1 + z_2$ فنستنتج مباشرةً أنّ:

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لتابع عقدي ل e^z

سنحاول إيجاد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للتابع الأسي العقدي و ذلك بوضع $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} \dots ..$$

و كون المتسلسلة متقاربة باطلاق

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \dots \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots ..\right)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

تمرين : أثبت أن التابع الأسي العقدي تحليلي على C باستخدام معادلتي كوشي ريمان .

لدينا

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y$$

الجزء الحقيقي $u = e^x \cos y$

الجزء التخيلي $v = e^x \sin y$

بما أننا أوجدنا القسم الحقيقي و التخيلي أصبح من السهل استخدام كوشي ريمان :

$$u_x = e^x cosy = v_y$$
$$u_y = -e^x siny = -v_x$$

فنلاحظ أن معادلتي كوشي ريمان محققتين على $\mathbb{C}$ و منه التابع الأسي العقدي تحليلي على $\mathbb{C}$

طويلة التابع الأسي العقدي و زاويته:

إن طويلة العدد العقدي هي :

$$|e^z| = e^x = e^{Rez} > 0 \quad : \quad \forall z \in C$$
$$\Rightarrow e^z \neq 0 \quad : \quad \forall z \in C$$

هذا يعني أن معادلة $e^z = 0$ مستحيلة

أما زاوية التابع الأسي العقدي : $arg\, e^z = y$

فمثلاً $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y}$ (أي أن طويلة العدد العقدي e^{iz} هي الجزء الحقيقي للأس)

التابع الاسي العقدي هو تابع دوري دوره الرئيسي $2\pi i$

الإثبات

لإثبات أن تابعاً عقدياً f دوري و دوره T يكفي أن نثبت أن $f(z+T) = f(z)$ مهما تكن z من منطقة تعريفه ، وهنا لدينا $T = 2\pi i \quad , \quad f(z) = e^z$

$$f(z+2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x\big(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\big)$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z = f(z)$$

حل المعادلة الاسية $e^z = a$ حيث a ثابت عقدي :

$a = 0$ المعادلة مستحيلة الحل

$a \neq 0$ نكتبه بشكل مثلثي (أو أسي) $a = |a|e^{iArg\,a}$ و من ثم :

$$e^z = a \quad \Leftrightarrow$$
$$e^x(\cos y + i\sin y) = |a|e^{iArg\,a}$$
$$\Leftrightarrow e^x = |a| \quad \& \quad y = Arg\,a + 2\pi k$$
$$\Leftrightarrow x = ln|a| > 0 \quad \& \quad y_k = Arg\,a + 2\pi k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z_k = ln|a| + i(Arg\,a + 2\pi k)$$

إذاً يوجد عددي غير منتهي من الحلول .

مثال : حل المعادلة $e^{iz} = -1 + i\sqrt{3}$

$$e^{i(x+iy)} = \left[\underbrace{|-1 + i\sqrt{3}|}_{\text{طويلة}}, \underbrace{Arg(-1 + i\sqrt{3})}_{\text{زاوية}}\right]$$
$$e^{-y+ix} = [2, Arctan(-\sqrt{3})]$$
$$[e^{-y}, x] = [2, Arc\tan(-\sqrt{3})]$$
$$\Leftrightarrow [e^{-y}, x] = \left[2, -\frac{\pi}{3} + \pi\right]$$
$$\Leftrightarrow e^{-y} = 2 \quad , \quad x_k = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$
$$\Leftrightarrow z_k = x_k + iy = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k + i(-ln2)$$

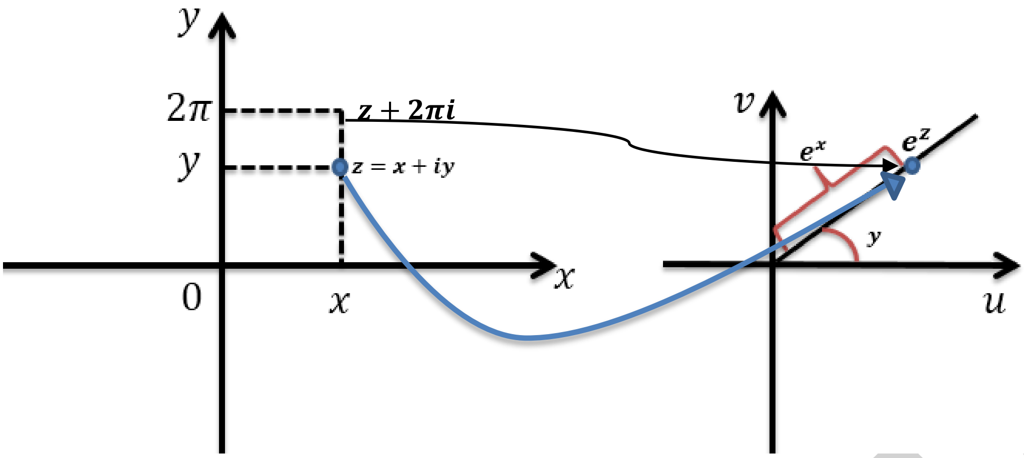
و هي مجموعة حلول المعادلة الأسية (كل قيمة صحيحة لـ k تقابل حلاً للمعادلة المعطاة)

تمثيل التابع الاسي العقدي

إن التابع الأسي العقدي $f(z) = e^z = e^x cosy + i\, e^x siny = u(x,y) + iv(x,y)$

معرف على $\mathbb{C}$ و التي تماثل $\mathbb{R}^2$ أي أن كل قيمة من المنطلق تتعين بثنائية (x,y) ، من جهة أخرى إن مستقر هذا التابع هو أيضاً $\mathbb{C}$ و التي تماثل $\mathbb{R}^2$ و بالتالي كل قيمة للتابع (صورة) تتعين بثنائية (u,v)

و بالتالي حتى نتمكن من تمثيل التابع الأسي نحن بحاجة لمستويين الأول للمنطلق و ليكن oxy والآخر للمستقر و ليكن ouv



- طويلة عدد عقدي هندسياً هي بعد ذلك العدد عن المبدأ و بالتالي سيظهر على الرسم أن e^z سيبعد عن مبدأ المستوي ouv بمقدار e^x
- إن e^z عدد عقدي زاويته y و بالتالي سيقع على نصف المستقيم الذي يصنع زاوية y مع ou (في مستوي المستقر)
- فعلياً تم تعيين موضع e^z قطبياً بمعرفة r,θ
- لو أضفنا للمسقط الثاني لـ z مقدار 2π (أي لو انتقلنا شاقولياً بمقدار 2π) فسنحصل على العدد العقدي $z+2\pi i$ و لما كان e^z تابعاً دورياً دوره $2\pi i$ فلا بد أن تكون صورة العدد $z+2\pi i$ هي نفسها صورة z و هي e^z كما هو موضح بالرسم أعلاه.
- و بالتالي إذا عرفنا صورة قطعة مستقيمة طولها 2π محمولة على مستقيمٍ شاقولي معادلته $x=x_0$ فهذا يعني أننا عرفنا صورة كامل المستقيم $x=x_0$ (لأن التابع دوري)
- إذا جعلنا x_0 تتحول على $]-\infty,+\infty[$ فإننا نحصل على صورة شريط أفقي عرضه من يساوي عرض القطعة المستقيمة التي نريد تصويرها .

♦غالباً ما نأخذ الشريط الأفقي الممثل بالمتراجحة $-\pi < Imz \leq \pi$.

تمرين : عين صورة القطعة المستقيمة التالية وفق التابع الأسي العقدي

$$z \in D = \{z = x_0 + iy \ : \ -\pi < y \leq \pi \}$$

الحل : ليكن $z \in D$ عندئذٍ $z = x_0 + iy$ و $-\pi < y \leq \pi$ و بالتالي يكون :

$$|e^z| = e^{x_0}$$

و عندما z يمسح القطعة المستقيمة D فإن y (التي تمثل الزاوية بين e^z و ou في مستوي المستقر) تمسح المجال $]-\pi, \pi]$ و هذا يعني أن لدينا :

$$r = e^{x_0} \quad , -\pi < \theta \leq \pi$$

و هذا يمثل دائرة في المستوي ouv نصف قطرها e^{x_0} و مركزها المبدأ

ملاحظة لو كانت محمولة على oy (فهذا يعني أن $x_0 = 0$) و بالتالي فإن

$r = e^{x_0} = e^0 = 1$ و عليه تكون صورة القطعة مستقيمة هي دائرة الوحدة .

انتهت المحاضرة

تصحيح أخطاء في المحاضرة الأولى الصفحة الرابعة

الخطأ

$$v_y = e^x \sin y \quad , \quad v_{yy} = -e^x \cos y$$

الصواب

$$u_y = -e^x \sin y \quad , \quad u_{yy} = -e^x \cos y$$

إعداد: منى شغل – أحمد أبو النوت – نذير تيناوي