5-4-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-تمارين عن تابعا الجيب و التجيب العقديان

2-تابعا الظل و التظل العقديان

تمرين : عين صورة القطعة المستقيمة التي طرفاها

$$z_1 = -\pi + i \quad , \quad z_2 = \pi + i$$

وفق التابع $cos\, z$

الحل :

لتكن $z \in [z_1, z_2]$ عندئذ $z = x + i$ حيث $-\pi \le x \le \pi$

$$w = cos\, z = cos(x)\, ch\, 1 - isin\,(x)\, sh1$$

ومنه $u = (ch\, 1)\, cos\, x$ و $v = -(sh\, 1)\, sin\, x$

و لكون $-Sin(x) = \sin(-x)$, $\cos(x) = \cos(-x)$ سنقوم باستبدال هذه المقادير بما يساويها في w لتوحيد الوسيط أي سنكتب :

$$\boxed{u = ch1 \cos(-x) \quad , \quad v = sh1 \sin(-x)}$$

لنحاول حذف الوسيط $-x$ و ذلك كما يلي :

$\frac{v}{sh1} = son(-x)$, $\frac{u}{ch1} = \cos(-x)$ بالتربيع و الجمع نجد أن :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u^2}{(ch\, 1)^2} + \frac{v^2}{(sh\, 1)^2} = 1}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

إذاً w صورة z وفق التابع $w = cosz$ تقع على القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ ونصفا قطره $ch\,1\,, sh\,1$

ومحوره المحرقي ox لان $((sh\,1 < ch\,1\,))$

عندما z تمسح القطعة المستقيمة فإن x ستمسح المجال $[-\pi, \pi]$ بالتالي الوسيط $(-x)$ سيمسح المجال $[-\pi, \pi]$ والصورة $w = \cos z$ ستمسح القطع الناقص السابق بكامله

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

أما محرقا القطع فلحسابهما نحسب أولاً c كما يلي :

$$c^2 = a^2 - b^2 = ch^2 1 - sh^2 1 = 1$$

و بالتالي المحرقين : $F'(x_0 - c, y_0) = (-1,0) \quad , \quad F(x_0 + c, y_0) = (1,0)$

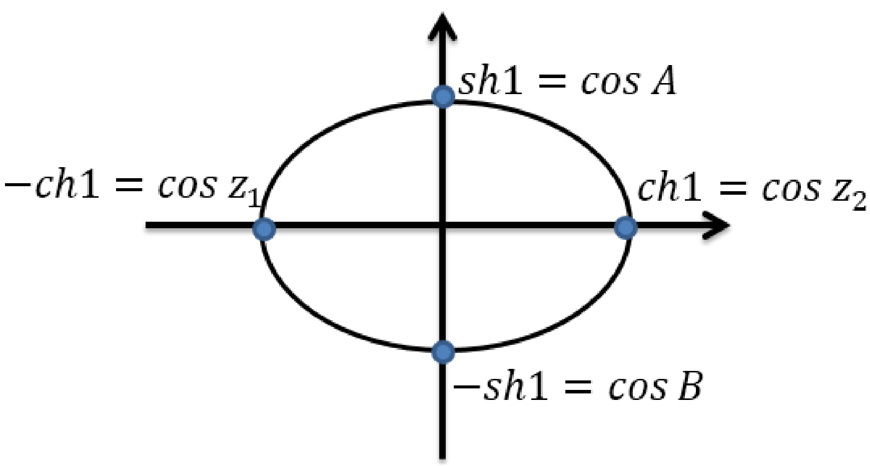
لنوجد صور أطراف القطعة المستقيمة :

$$\cos z_1 = \cos(-\pi + i) = \cos(-\pi)\, ch1 - isin(-\pi) sh1 = -ch1$$
$$cosz_2 = \cos(\pi + i) = \cos(\pi)\, ch1 - isin(\pi) sh1 = -ch1$$

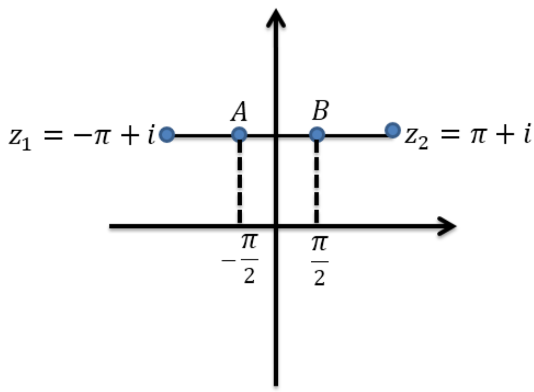
و الذرى الأخرى :

$$\cos z_A = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + i\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) ch1 - isin\left(-\frac{\pi}{2}\right) sh1 = ish1$$
$$\cos z_B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) ch1 - isin\left(\frac{\pi}{2}\right) sh1 = ish1$$

مما يبين أنّه إذا مسحت القطعة المستقيمة كاملة من z_1 الى z_2 سوف تكون الصورة هي كامل القطع .



مستوي المستقر ouv



مستوي المنطلق oxy

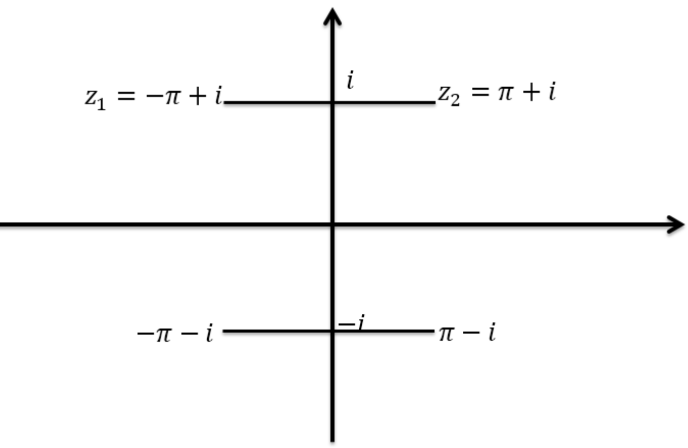
ملاحظة : عندما يسعى طول القطعة الى ∞ سوف يُمسح المستوي الصورة بقطوع ناقصة متحدة المركز $(0,0)$.

تمرين: (يترك للطالب) بأسلوب مماثل تماماً ،

عين صورة القطعة النظيرة للقطعة السابقة :

و هي القطعة المستقيمة طرفاها $-\pi - i \quad , \quad \pi - i$.

(القطعة موضحة في الرسم جانباً)



مثال : ما هي صورة القطعة المستقيمة $\{z = x \;\; : \; -\pi \le x \le \pi\}$

الحل : بالتعويض في الشكل الجبري لـ cosz :

ومنه $u = (ch\,0)\cos x = \cos x$ و $v = (sh\,0)\sin x = 0$

إن $u = \cos x$ ستمسح المجال $[-1,1]$ على المحور الحقيقي في المستوي الصورة من -1 الى 0 ثم إلى 1 ثم تعود إلى 0 وأخيراً الى -1 عندما تمسح x المجال $[-\pi,\pi]$.

تمرين : عين النقاط الشاذة للتابع $f(z) = \frac{1}{\cos z - i}$.

((النقطة الشاذة لتابع هي النقطة التي لا يكون التابع تحليلي عندها))

الحل :

البسط تحليلي على C وكذلك المقام تحليلي على C لأن $\cos z$ تحليلي ومنه النقاط الشاذة لـ f هي اصفار المقام فقط

وأصفار المقام هي حلول المعادلة $\cos z - i = 0$

$$\cos z = i \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2iz} - 2ie^{iz} + 1 = 0$$

لنفرض أن $e^{iz} = t$ ومنه $t^2 - 2it + 1 = 0$ ولنحلها على Δ :

$$a = 1 \quad , \qquad b = -2i \quad , c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(1)(1) = -8$$

ومنه $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$

$$t_1 = e^{iz} = \frac{-(-2i) + 2i\sqrt{2}}{2} = i\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$t_2 = e^{iz} = \frac{-(-2i) - 2i\sqrt{2}}{2} = i\left(1 - \sqrt{2}\right)$$

لنحل المعادلة الأولى

$$t_1 = e^{iz} = e^{-y}.e^{ix} = i\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

لنكتب العدد $i\left(1 + \sqrt{2}\right)$ بالشكل الاسي

$$r = \sqrt{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2} = \underbrace{\left|1 + \sqrt{2}\right|}_{\text{قيمة مطلقة}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 1 \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1 + \sqrt{2}} = 0$$
$$\Longrightarrow \theta = +\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow e^{-y}.e^{ix} = \left(1 + \sqrt{2}\right).e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$e^{-y} = 1 + \sqrt{2} \Longrightarrow y = -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$
$$x = +\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad : \quad k \in Z$$

لنعوض في $z = x + iy$ فيصبح لدينا

$$z_k = +\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

لنحل المعادلة الثانية

$$e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{ix-y}=e^{-y}.e^{ix}=i\left(1-\sqrt{2}\right)$$

لنكتب العدد $i\left(1-\sqrt{2}\right)$ بالشكل الاسي

$$r=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\underbrace{\left|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{سالب}}\right|}_{\text{قيمة مطلقة}}=\sqrt{2}-1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=-1 \quad , \quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{\sqrt{2}-1}=0$$

$$\Longrightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow e^{-y}.e^{ix}=\left(\sqrt{2}-1\right).e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{-y}=\sqrt{2}-1\Longrightarrow y=-ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad : \quad k\in Z$$

لنعوض في $z=x+iy$ فيصبح لدينا

$$w_k=-\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\,ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

إذاً مجموعة النقاط الشاذة لـ f هي $\{z_k \ , w_k \ : k\in Z\}$

تابعا الـ $tan\,z$ و $cotg\,z$

هما تابعان يُعطيان تعريفاً كما يلي : $tan\,z=\frac{sin\,z}{cos\,z}$ و $cotg\,z=\frac{cos\,z}{sin\,z}$ ولنوجد مشتقاتهم:

مشتق $cotz$:

البسط تحليلي على C والمقام تحليلي على C و بالتالي cotz تحليلي على C ما عدا أصفار المقام ومنه لنوجد اصفار المقام

$$sin\,z=0\Longleftrightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0\Longleftrightarrow e^{iz}=e^{i(-z)}$$

$$\Leftrightarrow iz = -iz + 2\pi k i \Leftrightarrow z = -z + 2\pi k \Leftrightarrow z = \pi k$$

ومنه أصفار التابع $sin\, z$ العقدي هي نفسها اصفار التابع $sin\, x$ الحقيقي ومنه

على تحليلي $cotg\, z$ $C\setminus\{\pi k : k \in Z\}$ أي أن

$$(cotg\, z)' = \frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z}$$

$$\boxed{(cotg\, z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}}$$

بنفس الأسلوب نجد أن

$$\boxed{(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – احمد أبو التوت – نذير تيناوي