/ /

المحاضرة 9 الأحد 15/4/2018

البرمجة ذات الأعداد الصحيحة:

صياغة نماذج رياضية باستخدام العددين الصحيحين 0 و 1

- نوضح فكرة البرمجة ذات الأعداد الصحيحة من خلال الأمثلة التالية:

1 مسألة ميزانية رأس المال:

نص المسألة:

تخطط شركة لصرف رأس مالها خلال الفترات الزمنية القادمة m ويوجد n مشروع تتنافس على رأس مال محدود هو B_i المتوفر للاستثمار في الفترة i

وعند اختيار كل مشروع يصبح هذا المشروع بحاجة إلى رأس مال معين في كل فترة من الفترات ويرمز له بالرمز a_{ij} الاستثمار المطلوب في المشروع j خلال الفترة i (الاستثمار المطلوب أي المال اللازم)

وتقاس قيمة المشروع بدلالة تدفق السيولة الموافق لهذا المشروع في كل فترة من الفترات وهو ما يُدعى قيمة التضخم (الزيادة التي تطرأ من جراء تشغيل هذا المال) ويدعى ذلك صافي القيمة الحالية

لنفرض أن V_j هو صافي القيمة الحالية للمشروع j ((رأس المال المتدفق))

* تكمن المسألة في اختيار المشاريع الملائمة للاستثمار التي تجعل القيمة الكلية لجميع المشاريع المختارة أعظمية.

الحل:

- لتكن لدينا المتحول x_j الذي يأخذ القيم التالية:

$x_j = 1$: إذا اخترنا المشروع j

$x_j = 0$: خلاف ذلك

حيث: $j = \overline{1, n}$

Scanned by CamScanner

* تابع الهدف :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j \longrightarrow Max$$

* القيود :

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq B_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$
- $x_j = 0 \quad \wedge \quad x_j = 1 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$

وعليه يكون النموذج الرياضي :
أوجد القيمة الأعظمية للتابع :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq B_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j = 0 \quad \wedge \quad x_j = 1 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

---

2 مسألة التكلفة الثابتة : (سؤال دورة هام)

لنأخذ مسألة تخطيط إنتاج n منتج حيث يحتاج المنتج j إلى كلفة تحضير (أو إنتاج) ثابتة K_j مستقلة عن الكمية المنتجة.
(مثلاً أجرة محل : هي كلفة تحضير أو إنتاج ثابتة)
ويحتاج إلى كلفة متغيرة C_j لكل وحدة إنتاج (مرتبطة بالمنتج)
تتناسب مع الكمية المنتجة (أكيد تناسب طردي)
لنفرض أن كل وحدة من المنتج j تحتاج إلى a_{ij} وحدة من المادة i
حيث يوجد m مادة.
بفرض أن المنتج j الذي له فرصة مبيعات قدرها d_j يباع بسعر p_j لكل وحدة.

Scanned by CamScanner

وأنه يتوفر فقط b_i وحدة من المادة i حيث $i = \overline{1,m}$

هدف المألة:

تعيين خليط المنتجات الأمثل الذي يجعل الربح الصافي أعظمياً.

(هذه المألة لا خطية كونه لدي تكلفتين (ثابتة ومتغيرة))

الحل:

إن الكلفة الكلية للإنتاج = الكلفة الثابتة + الكلفة المتغيرة.

وهي تابع غير خطي للكمية المنتجة.

ولكن بمساعدة المتحولات الصحيحة 0 و 1 يمكن صياغة المألة بشكل برنامج ذي أعداد صحيحة.

- نفرض المتحول الثنائي δ_j يرمز إلى القرار بإنتاج المنتج j أو عدم إنتاجه بعبارة أخرى

$\delta_j = 1$: إذا اتخذ قرار إنتاج المنتج j

$\delta_j = 0$: خلاف ذلك.

- نرمز بـ x_j للكمية المنتجة من المنتج j

عندئذٍ:

* تصبح تكلفة الإنتاج: $(k_j \delta_j + c_j x_j)$

الكلفة الثابتة (تكون بوجود قرار أنتج المشروع j لذلك وضعنا δ_j) — الكلفة المتغيرة

* سعر المبيع: $(p_j \cdot x_j)$

* تابع الربح Z:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j \delta_j + c_j \cdot x_j)$$

الربح الصافي = سعر المبيع − تكلفة الإنتاج

- القيود:

$$x_j \le d_j \cdot \delta_j \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

x_j: الكمية المنتجة من المنتج j

d_j: فرصة مبيعات المنتج j

Scanned by CamScanner

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leq b_i$ و $i = \overline{1,m}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

- $x_j \geq 0$ و $j = \overline{1,n}$

- $\delta_j = 0 \ \wedge\ \delta_j = 1$ و $j = \overline{1,n}$

المنوذج الرياضي :

أوجد القيمة الأعظمية للتابع :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j \delta_j + c_j x_j) \longrightarrow Max$$

(نسمي تابع الهدف ضمن الامتحان) ؟

ضمن القيود :

$$x_1 \leq d_1 \cdot \delta_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n \leq d_n \cdot \delta_n$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \leq b_m$$
$$x_j \geq 0 \ ;\ j = \overline{1,n}$$
$$\delta_j = 0 \ \wedge\ \delta_j = 1 \ ;\ j = \overline{1,n}$$

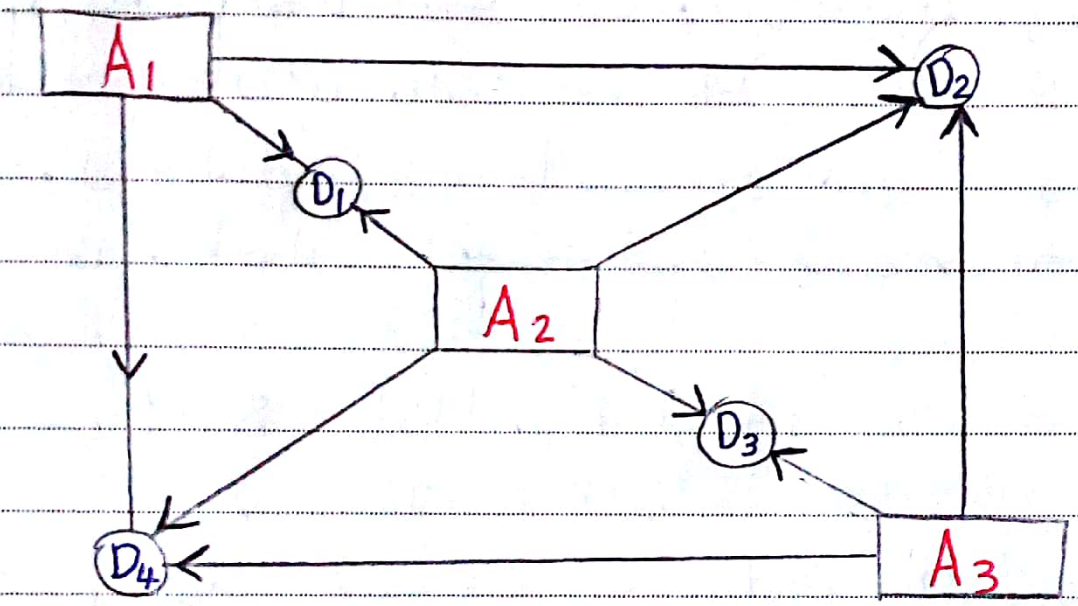
(نكتب القيود مفصّلة ضمن الامتحان)

Scanned by CamScanner

3 مسألة تعيين موقع مستودع:

تخطط شركة بيع بالمفرق للتوسع في نشاطاتها في منطقة معينة عن طريق إنشاء مستودعين جديدين.

يوضح الشكل المرفق المواقع المحتملة:



وينبغي تزويد 4 زبائن تقدّ طلباتهم بالتالي:

D_1 ، D_2 ، D_3 ، D_4

لنفرض أنه بإمكان أي موقعين من المواقع المرشّحة للمستودعات تلبية جميع الطلبات

حيث يمكن للموقع الأول تلبية طلبات الزبائن 1 و 2 و 4 فقط

ويمكن للموقع الثالث تلبية طلبات الزبائن 2 و 3 و 4 فقط

أما الموقع الثاني فيمكنه تلبية طلبات جميع الزبائن.

C_{ij} : كلفة نقل الوحدة الواحدة من الموقع i إلى الزبون j

حيث: $i = \overline{1,3}$ و $j = \overline{1,4}$

وأيضاً متوفر لدينا المعطيات التالية عن المواقع المرشّحة للمستودعات:

الموقع	سعة الموقع	رأس المال الابتدائي	كلفة التشغيل للوحدة الواحدة
1	A_1	K_1	P_1
2	A_2	K_2	P_2
3	A_3	K_3	P_3

Alamal

Scanned by CamScanner

والمطلوب :
اختيار المواقع الملائمة للمستودعين التي تجعل التكاليف الكلية للاستثمار والتشغيل والنقل أصغرية :
(مسألة بربحية لاغطية لأنه لدي 3 كلف)

الحل : اللاغطية في هذه المسألة هي الكلفة المتغيرة لكل موقع .
لدينا كلفة رأس المال ثابتة مستقلة عن الكمية المخزنة في المستودع وكلفة التشغيل والنقل متغيرة متناسبة مع الكمية المنقولة .
باستخدام المتحولات الصحيحة الثنائية يمكن صياغة المسألة برنامج لأعداد صحيحة :

- نفرض $\delta_i = 1$: إذا اخترنا الموقع i
$\delta_i = 0$: خلاف ذلك .
- نفرض x_{ij} الكمية المنقولة من الموقع i إلى الزبون j

* عليه نحصل على قيود تلبية الطلبات :
- شرط الموقع الأول :

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} \leq A_1 \cdot \delta_1$$

الكمية المنقولة من الموقع الأول إلى الزبون الثاني

- شرط الموقع الثاني :

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq A_2 \cdot \delta_2$$

- شرط الموقع الثالث :

$$x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq A_3 \cdot \delta_3$$

* قيد اختيار الموقع i :

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$

(لأنني أريد اختيار موقعين)

* قيود الزبائن :

$x_{11} + x_{21} = D_1$ (قيد الزبون الأول)
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = D_2$ (// // الثاني)

Scanned by CamScanner

$x_{23} + x_{33} = D_3$ (قيد الزبون الثالث)

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = D_4$ (" " الرابع)

حيث:

D_1 : الكمية التي يحتاجها الزبون الأول

D_2 : " " " " الثاني

D_3 : " " " " الثالث

D_4 : " " " " الرابع

* تابع الهدف:

◎ الكلفة المتعلقة بالموقع الأول:

$$\underbrace{K_1 \delta_1}_{\text{كلفة الاستثمار (ثابتة) أي كلفة رأس المال}} + \underbrace{P_1 (x_{11} + x_{12} + x_{14})}_{\text{كلفة التشغيل (متغيرة)}} + \underbrace{C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{14}x_{14}}_{\text{كلفة النقل (متغيرة)}}$$

◎ الكلفة المتعلقة بالموقع الثاني:

$$K_2 \delta_2 + P_2 (x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} + C_{24}x_{24}$$

◎ الكلفة المتعلقة بالموقع الثالث:

$$K_3 \delta_3 + P_3 (x_{32} + x_{33} + x_{34}) + C_{32}x_{32} + C_{33}x_{33} + C_{34}x_{34}$$

بالتالي فتابع الهدف هو:

$$\begin{aligned} L = {} & K_1 \delta_1 + P_1 (x_{11} + x_{12} + x_{14}) + C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{14}x_{14} \\ & + K_2 \delta_2 + P_2 (x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} + C_{24}x_{24} \\ & + K_3 \delta_3 + P_3 (x_{32} + x_{33} + x_{34}) + C_{32}x_{32} + C_{33}x_{33} + C_{34}x_{34} \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

النموذج الرياضي:

أوجد القيمة الأمثلية للتابع L:

$$L = k_1\delta_1 + P_1(x_{11}+x_{12}+x_{14}) + C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{14}x_{14}$$
$$+ k_2\delta_2 + P_2(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}) + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} + C_{24}x_{24}$$
$$+ k_3\delta_3 + P_3(x_{32}+x_{33}+x_{34}) + C_{32}x_{32} + C_{33}x_{33} + C_{34}x_{34} \longrightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} \le A_1 \cdot \delta_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le A_2 \cdot \delta_2$$
$$x_{32} + x_{33} + x_{34} \le A_3 \cdot \delta_3$$
$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$
$$x_{11} + x_{21} = D_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = D_2$$
$$x_{23} + x_{33} = D_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = D_4$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad ; \quad i = \overline{1,3} \quad ; \quad j = \overline{1,4}$$
$$\delta_i = \{0,1\} \quad ; \quad i = \overline{1,3}$$

بيانات البحث ^^ انتهى

mathematicians don't trust clarity ---

Scanned by CamScanner