

المهيدية: لتكن الحزمة و $A \in \text{Ob}(\mathcal{L})$ وليكن $u, v \in \mathcal{M}_A$ الشرط التي تكونه

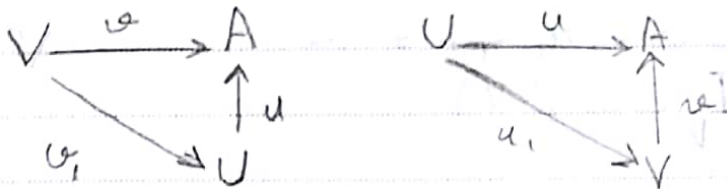
1 $v \leq u \wedge u \leq v$

2 توجد الكومورفزمات وحيدة u_1, v_1 فقط

$u = v \cdot u_1$ $v = u \cdot v_1$

البرهان:

(2) \iff (1)

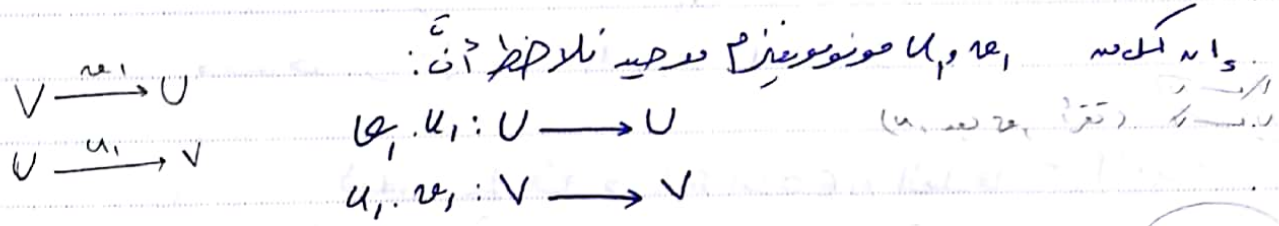


بفرض

$v \leq u \wedge u \leq v$

$v \leq u \implies \exists v_1 \in \mathcal{L}(V, U) ; v = u \cdot v_1$

$u \leq v \implies \exists u_1 \in \mathcal{L}(U, V) ; u = v \cdot u_1$



وانه يمكن ان يكون مورفزمات وحيدة نلاحظ ان:

$u_1 \cdot u_1 : U \rightarrow U$

$u_1 \cdot v_1 : V \rightarrow V$

$u \cdot (u_1 \cdot u_1) = (u \cdot v_1) \cdot u_1 = v \cdot u_1 = u$
 $v \cdot (u_1 \cdot v_1) = (v \cdot u_1) \cdot v_1 = u \cdot v_1 = v$

ان مورفزمات وحيدة
 كما ان مورفزمات
 لا يمكن ان تكون
 (الاشياء)

$\alpha : \mathcal{L}(X, U) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$
 $\alpha(f) = u \cdot f$ بتساوي
 $X = U \implies v_1, u_1 \in \mathcal{L}(U, U)$
 $\alpha(v_1, u_1) = u \cdot (v_1, u_1) = u$
 $I_U \in \mathcal{L}(U, U) , \alpha(I_U) = u \cdot I_U = u$

$\alpha(v_1, u_1) = u = \alpha(I_U)$
 وبما كان α بتساوي فانه نجد:
 $v_1, u_1 = I_U$

لأن α هو هومومورفيزم خطي

$$\beta: \mathcal{L}(X, V) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

تعيين $\beta(g) = \alpha \circ g$

$$X = V \Rightarrow u, v_1 \in \mathcal{L}(V, V)$$

$$\beta(u, v_1) = \alpha \cdot (u, v_1) = \alpha$$

$$I_V \in \mathcal{L}(V, V)$$

$$\beta(I_V) = \alpha \cdot I_V = \alpha$$

$$\beta(u, v_1) = \alpha = \beta(I_V) \Rightarrow \boxed{u, v_1 = I_V}$$

$$V \xrightarrow{u_1} U$$

$$\xleftarrow{u_1}$$

هنا نجد أن u_1 هو هومومورفيزم

نظن \mathcal{L} فئة و $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$ العلاقة \leq المعرفة على M_A مبرهنة

$$\forall v, u \in M_A, v \leq u \wedge u \leq v \Leftrightarrow v = u$$

هذه علاقة تكافؤ:

البرهان
بعض سابقاً أن \ll انعكاسية ومتعدية

$$\forall v \in M_A, v \leq v \Rightarrow v = v$$

وبالتالي فإن العلاقة \leq انعكاسية

$$\forall v, u, w \in M_A$$

$$u \leq u$$

$$u \leq w \Rightarrow v \leq w$$

$$v, u, w \in M_A$$

$$v \leq u \Rightarrow v \leq u \wedge u \leq v$$

$$u \leq w \Rightarrow u \leq v \wedge v \leq u$$

$$\Rightarrow v \leq w, w \leq v$$

$$\Rightarrow v = w$$

تعريف مورفيزمات:

$$F: \text{Mor}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall u: A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{L}_1)$$

$$F(u): F(A) \rightarrow F(B) \in \text{Mor}(\mathcal{L}_2)$$

بالشكل التالي $\forall A, B \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$ نأخذ

$$F: \mathcal{L}_1(A, B) \rightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$$

A, B

① دققنا الشروط التالية:

$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1) \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$\forall v, u \in \text{Mor}(\mathcal{L}_1) \quad F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$$

لكن \mathcal{L}_1 فيها فئتين نقول إنه يوجد لدينا كالتالي غير مباشر

تعريف

$$F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$$

إذا وجد لدينا ① تطبيع الأشياء:

$$\text{ob}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{L}_2)$$

$$A \rightarrow F(A)$$

② تطبيع مورفيزمات:

$$F: \text{Mor}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{L}_2)$$

$$u: A \xrightarrow{v} B \mapsto F(B) \xrightarrow{F(u)} F(A)$$

لحققنا جميع الشروط التالية:

$$\textcircled{1} \forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1) \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$\textcircled{2} \forall v, u \in \text{Mor}(\mathcal{L}_1) \quad F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$$

مربطتها

لكنه لفئة لا يوجد لكل $x \in \text{ob}(\mathcal{L})$ يوجد دالة مباشرة:

$$h_x: \mathcal{L} \rightarrow \text{Set's}$$

الدخان :
 لنعرف
 خلال - تطبيق التماثل

$$h_x \# : \mathcal{L} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$h_x \# : \text{ob}(\mathcal{L}) \longrightarrow \text{ob}(\text{Sets})$$

$$\forall x \in \text{ob}(\mathcal{L}) ; h_x(y) = \mathcal{L}(x, y)$$

$$y = y' \quad h_x(y) = \mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(x, y') = h_x(y')$$

(2) تطبيق التماثل

$$h_x \# : \text{Mor}(\mathcal{L}) \longrightarrow \text{Mor}(\text{Sets})$$

لكم :

$$u : A \longrightarrow B$$

$$h_x(u) = h_x(A) \longrightarrow h_x(B)$$

$$h_x(u) : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$\forall r \in \mathcal{L}(X, A) ; h_x(u)(r) = \underline{u \circ r}$$

(تطبيق التماثل) $h_x(u)$: تطبيق التماثل من $\mathcal{L}(X, A)$ إلى $\mathcal{L}(X, B)$ ، ونظيره $h_x(u)$: تطبيق التماثل من $\mathcal{L}(X, A)$ إلى $\mathcal{L}(X, B)$

$$h_x(I_A) = I_{h_x(A)} \quad \forall A \in \text{ob}(\mathcal{L})$$

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$h_x(I_A) : h_x(A) \longrightarrow h_x(A)$$

$$h_x(I_A) : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$\forall f \in \mathcal{L}(X, A)$

$$h_x(I_A)(f) = \underline{I_A \circ f} = \underline{f} \quad , \quad h_x(I_A) = I_{\mathcal{L}(X, A)} = I_{h_x(A)}$$

$u, v \in \text{Mor}(\mathcal{L})$

$$u : A \longrightarrow B \quad v : B \longrightarrow D \quad v \circ u = A \longrightarrow D$$

$$h_x(v \circ u) : h_x(A) \longrightarrow h_x(D)$$

$$: \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, D)$$

$f \in \mathcal{L}(X, A)$

$$h_X(v \circ u)(f) = h_X(v \circ u) \cdot f = v \cdot (u \cdot f) = h_X(v)(u \cdot f)$$

$$v: B \longrightarrow D$$

$$h_X(v): h_X(B) \longrightarrow h_X(D)$$

$$h_X(v): \mathcal{L}(X, B) \longrightarrow \mathcal{L}(X, D)$$

$$\forall u \cdot f \in \mathcal{L}(X, B) \quad h_X(v)(u \cdot f) = v \cdot (u \cdot f)$$

$$u: A \longrightarrow B$$

$$h_X(u): h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$$

$$\implies h_X(u) = \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X, A), \quad h_X(u)(f) = u \cdot f$$

$$h_X(v \circ u)(f) = h_X(v)(u \cdot f) = h_X(v) \cdot (h_X(u)(f))$$

$$= (h_X(v) \cdot h_X(u))(f)$$

$$\implies h_X(v \circ u)(f) = h_X(v)(f) \cdot h_X(u)(f)$$

منه تحقق الشرط الثاني
وبالتالي نثبت ان h_X هو الهمومورفي

النتيجة المتأخرة