مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in Ob(\mathcal{L})$ ولتكن $u, v \in M_A$ الشروط الآتية متكافئة.

1. $v \leq u \wedge u \leq v$
2. توجد ايزومورفيزمات وحيدة u_1, v_1 تحقق

$$u = v.u_1 \qquad v = u.v_1$$

البرهان:

$(1) \Longrightarrow (2)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_1"'] & A \\ & U \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u_1"'] & A \\ & V \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

بفرض

$$v \leq u \qquad \wedge \qquad u \leq v$$

$v \leq u \quad \exists v_1 \in \mathcal{L}(V, U) \; ; \; v = u.v_1$ (1) مونومورفيزم

$u \leq v \quad \exists u_1 \in \mathcal{L}(U, V) \; ; \; u = v.u_1$ (2) مونومورفيزم

وان كل من v_1, u_1 مونومورفيزم وحيد نلاحظ أن:

$V \xrightarrow{v_1} U$

$U \xrightarrow{u_1} V$

$v_1.u_1 : U \longrightarrow U$

$u_1.v_1 : V \longrightarrow V$

$$\cdot \; u.(v_1.u_1) = (u.v_1).u_1 = v.u_1 = u$$

$$\cdot \; v.(u_1.v_1) = (v.u_1).v_1 = u.v_1 = v$$

u مونومورفيزم كما v مورفيزم

u مونومورفيزم يعني متباين

$$\alpha : \mathcal{L}(X, U) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$\alpha(f) = u.f$ متباين

$$X = U \Longrightarrow v_1.u_1 \in \mathcal{L}(U, U)$$

$$\alpha(v_1.u_1) = u.(v_1.u_1) = u$$

$$I_U \in \mathcal{L}(U, U) \quad , \quad \alpha(I_U) = u.I_U = u$$

$$\alpha(v_1.u_1) = u = \alpha(I_U)$$

$$\boxed{v_1.u_1 = I_U}$$

ولما كان α متباين فإنه ينتج:

/ /

لذلك ـ v مونومورفيزم فإن التطبيق

$$\beta : \mathcal{L}(X,V) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$$

$$\beta(g) = v.g \quad \text{متباين}$$

$$X = V \Longrightarrow u_1 . v_1 \in \mathcal{L}(V,V)$$

$$\beta(u_1 . v_1) = v.(u_1 . v_1) = v$$

$$I_V \in \mathcal{L}(V,V)$$

$$\beta(I_V) = v . I_V = v$$

$$\beta(u_1 . v_1) = v = \beta(I_V) \Longrightarrow \boxed{u_1 . v_1 = I_V}$$

$$V \underset{u_1}{\overset{v_1}{\rightleftarrows}} U$$

ومنه نجد أن كل من u_1 , v_1 ايزومورفيزم .

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ العلاقة ρ المعرفة على المجموعة M_A بالشكل الآتي :

$$\forall v, u \in M_A \; ; \; v \rho u \Longleftrightarrow v \leq u \land u \leq v$$

هي علاقة تكافؤ :

البرهان :

برهنا سابقاً أن $\leq$ انعكاسية ومتعدية.

$$* \quad \forall v \in M_A \; , \; v \leq v \Longrightarrow v \rho v$$

وبالتالي فإن العلاقة ρ انعكاسية.

$$\forall v, u, w \in M_A$$

$$\left.\begin{array}{l} v \leq u \\ u \leq w \end{array}\right\} \Longrightarrow v \leq w$$

ليكن $v, u, w \in M_A$

$$v \rho u \Longrightarrow v \leq u \land u \leq v$$

$$u \rho w \Longrightarrow u \leq w \land w \leq u \quad \Longrightarrow v \leq w \; , \; w \leq v$$

$$* \text{حسب} \Longrightarrow v \rho w$$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ ولنفرض أن $v \in M_A$
نسمي العنصر (U, u) شيء جزئي في A إذا كان ممثلاً لصف التكافؤ المولد بالعنصر v

$u \in \bar{v}$ $\quad u \rho v \quad u \leq v \quad v \leq u$

صف تكافؤ مولد بالعنصر v

أشياء الخارج:

$$f : A \longrightarrow B$$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $B \in ob(\mathcal{L})$ ولنفرض أن E_B المؤلف من جميع الإيبومورفيزمات التي مجالها:

$$v : B \longrightarrow U$$

إن $I_B \in E_B$

لنعرف على الصف E_B العلاقة $\leq$ بالشكل

$$v, u \in E_B \; ; \; v \leq u \Leftrightarrow \exists u_1 \in \mathcal{L}(V, U)$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[dl, "u_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

$u = u_1 . v$

واضح أن u_1 ايبومورفيزم.

بما أن (u_1 إيبومورفيزم) ← u_1 وجدنا العلاقة $\leq$ انعكاسية ومتعدية

الدوال: تعميم لمفهوم التطبيق أي من بنية جبرية لبنية جبرية
لتكن $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ فئتين نقول إنه يوجد لدينا دالي (مباشر)

$$F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

إذا وجد لدينا:

1) تطبيق أشياء:

$$F : ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$

$A \in ob(\mathcal{L}_1)$ وحيد $F(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$

2) تطبيق مورفيزمات:

/ /

ـ تطبيق مورفيزمات:

$$F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall u: A \longrightarrow B \in Mor(\mathcal{L}_1)$$

$$F(u): F(A) \longrightarrow F(B) \in Mor(\mathcal{L}_2)$$

وبالتالي $\forall A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإنه يوجد

$$F_{A,B}: \mathcal{L}_1(A,B) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$$

(1) و (2) تحققان الشروط التالية:

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$v, u \in Mor(\mathcal{L}_1) \quad F(v.u) = F(v) . F(u)$$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ فئتين نقول إنه يوجد دالة فيها دالي غير مباشر

$$F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

إذا وجد لدينا (1) تطبيق أشياء:

$$ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$

$$A \longrightarrow F(A)$$

(2) تطبيق مورفيزمات:

$$F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

$$u: A \xrightarrow{v} B \longmapsto F(B) \xrightarrow{F(v)} F(A)$$

تحققان معاً الشروط الآتية:

(1) $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \; ; \; F(I_A) = I_{F(A)}$

(2) $\forall v, u \in Mor(\mathcal{L}_1) : F(v.u) = F(u) . F(v)$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة لأجل كل $x \in ob(\mathcal{L})$ يوجد دالي مباشر:

$$h_x: \mathcal{L} \longrightarrow Set's$$

/ /

البرهان:

لنعرف $h_X: \mathcal{L} \longrightarrow Sets$

من خلال تطبيق الأشياء

$$h_X: ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(Sets)$$

$$\forall Y \in ob(\mathcal{L})\ ;\ h_X(Y) = \mathcal{L}(X, Y)$$

$$Y = Y' \qquad h_X(Y) = \mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y') = h_X(Y')$$

② تطبيق المورفيزمات

$$h_X: Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(Sets)$$

ليكن:

$$u: A \longrightarrow B$$

$$h_X(u): h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$$

$$h_X(u): \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$\forall v \in \mathcal{L}(X, A)\ ;\ h_X(u)(v) = \underline{u.v}$$

(نبرهن تطبيق بالنسبة لـ $h_X(u)$) وظيفة. (التعريف تم [illegible])

$$h_X(I_A) = I_{h_X(A)} \qquad \forall A \in ob(\mathcal{L})$$

$$I_A: A \longrightarrow A$$

$$h_X(I_A): h_X(A) \longrightarrow h_X(A)$$

$$h_X(I_A): \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$\forall f \in \mathcal{L}(X, A)$

$$h_X(I_A)(f) = \underline{I_A . f} = \underline{f} \ ,\ h_X(I_A) = I_{\mathcal{L}(X,A)} = I_{h_X(A)}$$

$u, v \in Mor(\mathcal{L})$

$$u: A \longrightarrow B \qquad v: B \longrightarrow D \qquad v.u = A \longrightarrow D$$

$$h_X(v.u): h_X(A) \longrightarrow h_X(D)$$

$$: \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, D)$$

$$f \in \mathcal{L}(X, A)$$

/ /

$$h_X(v.u)(f) = \cancel{h_X}(v.u)\, f = v(u.f) = h_X(v)(u.f)$$

$$v : B \longrightarrow D$$
$$h_X(v) : h_X(B) \longrightarrow h_X(D)$$
$$h_X(v) : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$$

$$\forall\, u.f \in \mathcal{L}(X,B)\quad h_X(v)(u.f) = v.(u.f)$$

$$u : A \longrightarrow B$$
$$h_X(u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$$
$$\Longrightarrow h_X(u) = \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$
$$\forall f \in \mathcal{L}(X,A),\quad h_X(u)(f) = u.f$$

ولنأخذ

$$h_X(v.u)(f) = h_X(v)(u.f) = h_X(v).\left(h_X(u)(f)\right)$$
$$= (h_X(v).h_X(u))(f)$$
$$\Longrightarrow h_X(v.u)(f) = h_X(v)(f).h_X(u)(f)$$

ومنه تحقق الشرط الثاني.

وبالتالي فإن h_X هو دالي مباشر.

انتهت المحاضرة