◄ دكتور المادة: برلنت مطيط

◄المحاضرة : السادسة   عنوان المحاضرة: الطرق التكرارية (S.O.R)

المحتوى العلمي :ـ أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-طريقة $S.O.R$

2- مبرهنات وتمارين

- **تناولنا في المحاضرة السابقة طريقتي غاوس سيدل وجاكوبي وسنكمل معكم في الطرائق التكرارية طريقة (S.O.R)**

طريقة $S.O.R$:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ ، التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة . تعرف طريقة $S.O.R$ العددية بأنها الطريقة التي نفرق بها مصفوفة الأمثال بالشكل حيث ندخل الوسيط w :

$$A = L + U + D = L + U + w\frac{D}{w}$$

$$A = M - N \ ; \begin{cases} M = \dfrac{D}{w} + L \\ N = M - A = \dfrac{D}{w} + L - \left(L + U + w\dfrac{D}{w}\right) = \dfrac{1-w}{w}D - U \end{cases}$$

بالاعتماد على التعريف السابق و العلاقة :

$$X^{k+1} = M^{-1}NX^K + M^{-1}b \qquad ; \ k \geq 0 \ , \forall x^0$$

نجد أن المتتالية التكرارية لطريقة $S.O.R$ تعطى بالشكل

$$X^{k+1} = B_{SOR}X^K + C_{SOR} \ ; \begin{cases} B_{SOR} = M^{-1}N = \left(\dfrac{D}{w} + L\right)^{-1}\left(\dfrac{1-w}{w}D - U\right) \\ C_{SOR} = M^{-1}b = \left(\dfrac{D}{w} + L\right)^{-1} b \end{cases}$$

ملاحظة : إذا كانت $w = 1$ فإن طريقة $S.O.R$ تتطابق مع طريقة غاوس سيدل

وإذا كانت $w = 0$ فإنها تتطابق مع طريقة جاكوبي

علماً أن w هي القيمة المثلى ويتم حسابها بطريقتين ما حسب التعريف وسنوضح ذلك من خلال المثال الأتي أو من خلال القانون مباشرة سنأخذه نهاية المحاضرة

مثال محلول صفحة 153:

بفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

والمطلوب :1) أوجد جذور هذه الجملة باستخدام طريقة $S.O.R$ في حال $w = 1$ أي أوجد القيم الذاتية للمصفوفة B_{SOR} .

2) قارن بين $\rho(B_{SOR})\rho(B_{GS})$, عندما تحقق w العلاقة : $4(1-w) + \frac{w^2}{100} = 0$

الحل: $$B_{SOR} = \left(\frac{D}{w} + L\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D - U\right)$$

عندئذ من المصفوفة A نجد أن:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{D}{w} = \begin{pmatrix} \frac{10}{w} & 0 \\ 0 & \frac{10}{w} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{D}{w} + L = \begin{pmatrix} \frac{10}{w} & 0 \\ 1 & \frac{10}{w} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{D}{w} + L\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{w}{10} & 0 \\ -\frac{w^2}{100} & \frac{w}{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1-w}{w}D = \begin{pmatrix} (10)\frac{1-w}{w} & 0 \\ 0 & (10)\frac{1-w}{w} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-w}{w}D - U\right) = \begin{pmatrix} (10)\frac{1-w}{w} & -1 \\ 0 & (10)\frac{1-w}{w} \end{pmatrix}$$

وبالتالي:
$$B_{SOR}=\begin{pmatrix}\frac{w}{10} & 0\\ -\frac{w^2}{100} & \frac{w}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(10)\frac{1-w}{w} & -1\\ 0 & (10)\frac{1-w}{w}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{SOR}=\begin{pmatrix}1-w & -\frac{w}{10}\\ -\frac{(w)(1-w)}{10} & \frac{w^2}{100}+1-w\end{pmatrix}$$

وبالتالي القيم الذاتية الموافقة لهذه المصفوفة تنتج من العلاقة :

$$\det(B_{SOR}-\lambda I)=0 \quad \Leftrightarrow (1-w-\lambda)\left[\frac{w^2}{100}+2-w-\lambda\right]-\frac{w^2(1-w)}{100}=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda\left[\frac{w^2}{100}+2(1-w)\right]+(1-w)^2=0$$

نحل المعادلة بالنسبة لـλ (بالاتمام الى مربع كامل ثم استخدام المطابقات التربيعية)

$$(*)\ldots\ldots\lambda=(1-w)+\frac{w^2}{100}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{4(1-w)\,w^2}{100}+\frac{w^4}{10000}\right]^{\frac{1}{2}}$$

وجدنا أنه عندها $w=1$ فإن طريقة $S.O.R$ تتطابق مع غاوس سيدل . وبتعويض $w=1$ في العلاقة الأخيرة$(*)$ نجد الجذور ل λ بطريقة غاوس سيدل هي:

$$\lambda=\frac{1}{200}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1000}}=\frac{1}{200}\pm\frac{1}{200}=\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{200}-\frac{1}{200}=0\\ \lambda_2=\frac{1}{200}+\frac{1}{200}=\frac{1}{100}\end{cases}$$

أي يوجد جذرين λ هما 0, 0.01 وبتغير قيمة w تتغير الجذور .

طريقة $S.O.R$:

$$4(1-w)+\frac{w^2}{100}=0\Rightarrow\frac{1}{100}w^2-4w+4=0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{15.84}$$

$$\Rightarrow w_2=398.9974874 \qquad ,w_1=1.0002512579$$

وعليه نجد أن أصغر قيمة لـw هي $w_1=1.0002512579$ أي $w\approx 1$ أي إنها قريبة جداً من wالموافقة لطريقة غاوس سيدل .

وبحساب جذور λ الموافقة لطريقة $S.O.R$:

$$(1) \ldots 4(1-w)+\frac{w^2}{100}=0 \Rightarrow \frac{w^2}{100}=-4(1-w) \Rightarrow (2) \ldots \frac{w^2}{200}=-2(1-w)$$

بالتعويض $(1),(2)$ في العلاقة $(*)$: $\lambda=(1-w)-2(1-w)=w-1$

بتعويض $w_1=1.0002512579$ في قيمة λ نجد $\lambda=0.002512579$

بالمقارنة ان $\rho(B_{SOR})=0.002512579$ ، $\rho(B_{GS})=0.01$

مما يوضح الدور الذي يلعبه $\rho(B)$ في عملية الاختيار w

مبرهنة (Kahan)

إذا كانت A مصفوفة مربعة وغير شاذة موافقة لجملة المعادلات الخطية $AX=b$ عندئذ يحقق نصف قطر الطيفي $\rho(B_{SOR})$ الناتج عن طريقة $S.O.R$ العلاقة

$$\rho(B_{SOR}) \geq |1-\omega| \; ; \forall \omega \neq 0$$

وعليه فإن طريقة $S.O.R$ تتقارب فقط عندما $\omega \in]0,2[$.

مبرهنة (Ostrowski-Reich)

إذا كانت A مصفوفة معرفة إيجابا و $\omega \in]0,2[$ عندئذ تتقارب طريقة $S.O.R$ من أجل أي قيمة ابتدائية $x^{(0)}$.

مبرهنة

إذا كانت A مصفوفة معرفة إيجابا وثلاثية الأقطار عندئذ القيمة المثلى لـ ω تعطى بالعلاقة :

$$\omega_{Opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho(B_J)\right)^2}}$$

حيث $\rho(B_J)$ نصف قطر التقارب بجاكوبي

أن أمكن استخدام هذه الطريقة للسهولة

معنى المصفوفة ثلاثية الأقطار: اي ان العناصر التي لا تنتمي للقطر الرئيسي او اللذي فوقة او تحته تكون اصفار كما في الأمثلة التالية:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

الاقطار الثلاث

- نظرا لصعوبة التعامل مع الصيغة المصفوفية للمتالية التكرارية الموافقة لطريقة $S.O.R$ فاننا سنقدم خوارزمية يمكننا ايجاد الحلول التقريبية وذلك دون الحاجة الى حساب مقلوب المصفوفة $\left(\frac{D}{w}+L\right)$

وبالاعتماد على تعريف طريقة $S.O.R$ نجد أن **المتتالية التكرارية** هي :

$$\left(\frac{D}{\omega}+L\right)x^{(k+1)}=\left(\frac{1-\omega}{\omega}D-U\right)x^{(k)}+b$$

والتي يمكن أعادة كتابتها بالشكل :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\dfrac{\omega}{a_{11}}\left(b_1-\displaystyle\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j^{(k)}\right) \\ x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad ; i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

تمارين عن الطرق التكرارية

تمرين (1) : لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$3x_1-x_2+x_3=1$$

$$3x_1+6x_2+2x_3=0$$

$$3x_1+3x_2+7x_3=4$$

المطلوب: أوجد الحل العددي لهذه الجملة إذا علمت أن: نقطة البداية $x^0=(0.0351,-0.2368\,,0.6579)$ وذلك باستخدام طريقة $S.O.R$ علما أن $w=1{,}1$.

$$x_i^{(k)}=(1-\omega)x_i^{(k+1)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad ; i=2,3,\dots,n$$

$$\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\3&6&2\\3&3&7\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

نعوض في المعادلة فنجد:

$$x_1^{(k)} = (1-\omega)x_1^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{11}}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{3} a_{1j}x_j^{(k-1)}\right]$$
$$= (1-\omega)x_1^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}\right]$$
$$x_2^{(k)} = (1-\omega)x_2^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{22}}\left[b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j}x_j^{(k)} - \sum_{j=3}^{3} a_{2j}x_i^{(k+1)}\right]$$
$$= (1-\omega)x_2^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)}\right]$$
$$x_3^{(k)} = (1-\omega)x_3^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{33}}\left[b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(k)}\right]$$
$$= (1-\omega)x_3^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k-1)}\right]$$

بالتعويض من مصفوفة الأمثال والثوابت: كلاً من $a_{ij}\ , b_{ij}\ \ ; i,j = 1,2,3$

$$x_1^{(k)} = -0{,}1x_1^{(k-1)} + \frac{1.1}{3}\left[1 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right]$$
$$x_2^{(k)} = -0{,}1x_2^{(k-1)} + \frac{1{,}1}{6}\left[-3x_1^{(k)} - 2x_3^{(k-1)}\right]$$
$$x_3^{(k)} = -0{,}1x_3^{(k-1)} + \frac{1{,}1}{7}\left[4 - 3x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}\right]$$

:$k = 1$

$$x_1^{(1)} = -0{,}1x_1^{(0)} + \frac{1{,}1}{3}\left[1 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right] = 0{,}366666666667$$
$$x_2^{(1)} = -0{,}1x_2^{(0)} + \frac{1{,}1}{6}\left[-3x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}\right] = -0{,}2016666666667$$
$$x_3^{(1)} = -0{,}1x_3^{(0)} + \frac{1{,}1}{7}\left[4 - 3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}\right] = 0{,}55078571428571$$

:$k = 2$

$$x_1^{(2)} = -0{,}1x_1^{(1)} + \frac{1{,}1}{3}\left[1 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right] = 0{,}05410079365079$$

$$x_2^{(2)} = -0{,}1x_2^{(1)} + \frac{1{,}1}{6}\left[-3x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}\right] = -0{,}2115435317$$

$$x_3^{(2)} = -0{,}1x_3^{(1)} + \frac{1{,}1}{7}\left[4 - 3x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}\right] = 0{,}64771586224430$$

تمرين 2: لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية بحيث نقطة البداية $(1,2,-1)$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$$

1)- أثبت أن $\underbrace{\rho(T_j)}_{\text{نصف القطر الطيفي لجاكوبي}} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ ليست متقاربة

2)- أثبت أن $\underbrace{\rho(T_g)}_{\text{نصف القطر الطيفي لغاوس سيدل}} = \frac{1}{2} < 1$ متقاربة

الحل: اولا طريقة **جاكوبي :**

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

$$x^{(k)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k-1)} + D^{-1}b$$

$$T_j = -D^{-1}(L+U)\,,\,C_j = D^{-1}b$$

$$\Longrightarrow x^k = T_j x^{(k-1)} + C_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$T_j = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

حساب نصف القطر الطيفي $\rho(T_j)$. لأجل ذلك نوجد القيم الذاتية من العلاقة:

$$\det(T_j - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0,5 & -0,5 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0,5 & 0,5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - \frac{5\lambda}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(\lambda^2 + \frac{5\lambda}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = 0 \; or \; \lambda = \mp\frac{\sqrt{5}}{2} i$$

$$\rho(T_j) = max|\lambda| \quad ; \quad \lambda_{(1,2)} = \mp\frac{\sqrt{5}}{2} i \, , \lambda_3 = 0$$
$$\Longrightarrow \rho(T_j) = max|\lambda_{1,2,3}| = \left|\mp\frac{\sqrt{5}}{2} i\right| > 1$$

2) بطريقة غاوس سيدل:

$$x^k = (D+L)^{-1}Ux^{(k-1)} + (D+L)^{-1}b = T_g x^{(k-1)} + C_g$$
$$T_g = (D+L)^{-1}U \, , C_g = (D+L)^{-1}b$$

$$(D+L) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$T_g = -(D+L)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

حساب نصف القطر الطيفي $\rho(T_j)$.لأجل ذلك نوجد القيم الذاتية من العلاقة:

$$\det(T_g - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5-\lambda & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{(1,2)} = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 0$$

$$\rho(T_g) = max|\lambda_i| = max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

$$\Rightarrow \rho(T_g) = \frac{1}{2} < 1$$

انتهت المحاضرة

إعداد:لبنى الطون–شهناز طاطيش–عبد الرحمن البحش