المحاضرة الثالثة

لنفرض أن $\mathcal{L}_R$ فئة المودولات اليسارية فوق الحلقة الواحدية R ولتكن

$$u : A \longrightarrow B$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_R$ (تشاكلات - u مودولية)

الشروط التالية متكافئة:
1. u مونومورفيزم.
2. u متباين.

الرهان: $2 \Longleftarrow 1$ لنفرض أن u مونومورفيزم ولنفرض أيضاً.

$N = Ker(u)$ إن N مودول جزئي في A

لنفرض جدلاً أن النواة ليست صفراً (التشاكل ليس متباين)

$N \neq 0$ ولما كان u مونومورفيزم نأخذ التطبيق

$$\alpha : \mathcal{L}(N, A) \longrightarrow \mathcal{L}(N, B)$$

$$\alpha(f) = u \cdot f$$ متباين

لنفرض أن

$$v_1 : N \longrightarrow A$$

~~[illegible]~~ $v_1(x) = 0 \quad \forall x \in N$

$$v_2 : N \longrightarrow A$$

$$v_2(x) = x \quad \forall x \in N$$

نلاحظ أن $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(N, A)$ وأن $v_1 \neq v_2$

وأن $\alpha(v_1) = u \cdot v_1$, $\alpha(v_2) = u \cdot v_2$

$\forall x \in N \ , \ u \cdot v_1(x) = u(v_1(x)) = u(0) = 0$

u تشاكل

$u \cdot v_2(x) = u(v_2(x)) = u(x) = 0$ أي أن $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$

وهذا يبين أن $u \cdot v_1 = u \cdot v_2$ ولما كان α متباين

عندئذٍ $v_1 = v_2$ وهذا غير ممكن ومنه:

$N = 0$ وبالتالي التشاكل u متباين.

(⇐ ١) نفرض أن الشكل المتباين ولكن $X \in ob(\mathcal{L})$ ولنبرهن أن التطبيق

متباين $\alpha : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$

لنفرض جدلاً أن α ليس متباين عندئذ يوجد:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ حيث $\lambda_1 , \lambda_2 \in \mathcal{L}(X,A)$

وأن $\alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2) \Rightarrow$ ومنه $u.\lambda_1 = u.\lambda_2$

$$\forall x \in X \; ; \; u.\lambda_1(x) = u.\lambda_2(x)$$

$$u(\lambda_1(x)) = u.(\lambda_2(x))$$

$$u(\lambda_1(x) - \lambda_2(x)) = 0$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_2(x) \in Ker(u) = \{0\}$$

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$$

وذلك $\forall x \in X$ ومنه نجد $\lambda_1 = \lambda_2$ وهذا تناقض

ومنه التطبيق α متباين وبالتالي المورفيزم u هو مونومورفيزم

#

الأشياء الجزئية:

المونومورفيزمات

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ لنعرف الصنف M_A المؤلف من جميع المونومورفيزمات

فإن $v : V \longrightarrow A$ حيث $V \in ob(\mathcal{L})$ واضح أن $M_A \neq \phi$ لأن

$I_A \in M_A$

لنعرف على الصف M_A علاقة $\leq$ (~~...~~) بالشكل

$$\forall v, u \in M_A \; , \; v \leq u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathcal{L}(V,U)$$

حيث $v = u.v_1$,

نلاحظ مباشرة أن v_1 مونومورفيزم

{حسب مبرهنة سابقة $v = u.v_1$ هو مونومورفيزم ⟸ v_1 هو مونومورفيزم}

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_1"'] & A \\ & U \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

تمهيدية : لتكن $\mathcal{L}$ الفئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ ولنفرض أن

$v : V \longrightarrow A$

$u : U \longrightarrow A \in \mathcal{M}_A$

الشروط الآتية متكافئة :

(1) $v \leq u$

(2) يوجد مورفيزم وحيد $v_1 \in \mathcal{L}(V,U)$ بحيث $v = u \cdot v_1$

البرهان : (1) ⟸ (2) يكفي إثبات أن v_1 وحيد

لنفرض أن $v_2 : V \longrightarrow U$ يحقق $v = u \cdot v_2$ ومنها $u \cdot v_1 = u \cdot v_2$

$u : U \longrightarrow A$

u مونومورفيزم
(2) ⟸
$v \leq u$

$\alpha : \mathcal{L}(X,U) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$

$\alpha(f) = u \cdot f$ متباين

$v_1, v_2 \in \mathcal{L}(V,U)$

$\alpha(v_1) = u \cdot v_1 = u \cdot v_2 = \alpha(v_2)$

وبما أن u مونومورفيزم نجد أن $v_1 = v_2$ أي أن v_1 وحيد

(2) ⟸ (1) واضح حسب التعريف.

#

تمهيدية : لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ العلاقة $(\leq)$ المعرفة على الصنف هي انعكاسية ومتعدية.

البرهان : انعكاسية ليكن $v : V \to A \in \mathcal{M}_A$ بما أن $I_V \in \mathcal{L}(V,V)$ ويحقق

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "I_V"'] & A \\ & V \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

$v = v \cdot I_V$

نجد أن $v \leq v$

وبالتالي $\leq$ انعكاسية

ليكن $v, u, w \in M_A$ وتحقق $u \le w$ ، $v \le u$

* ولنبرهن أن $v \le w$

[1] $v \le u \iff \exists v_1 \in \mathcal{L}(V,U) ; v = u.v_1$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u_1"'] & A \\ & W \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

$u \le w \iff \exists u_1 \in \mathcal{L}(U,W) ; u = w.u_1$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_1.v_1"'] & A \\ & W \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

نلاحظ أن

$u_1.v_1 : V \longrightarrow W$

وتحقق

$w.(u_1.v_1) = (w.u_1).v_1$

$= u.v_1 = v$

ومنه ينتج أن $v \le w$ وبالتالي $\le$ متعدية.

#

انتهت المحاضرة