◄دكتور المادة: أحمد هايل

◄المحاضرة: الثامنة ◄عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : حل تمارين + تعريف محيط مجموعة .

تمرين : أثبت أن $A = [0,1[$ غير مغلقة وغير مفتوحة .

الحـــل

نوجد متتالية $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ من عناصر A متقاربة من الواحد ، ولكن $1 \notin [0,1[$ فإن A مجموعة غير مغلقة

حسب المبرهنة : E مغلقة $\Leftrightarrow$ إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من عناصر E ومتقاربة من a فإن $a \in E$.

إن $0 \in A$ ولكن : $\nexists \varepsilon > 0\ ;\ ]-\varepsilon , \varepsilon[= N(0,\varepsilon) \subseteq A$

أي لا يوجد عدد ε يحقق ان الكرة التي مركزها 0 محتواه في A فإن A غير مفتوحة .

تمرين : بين هل Q مغلقة أو مفتوحة في $(\mathbb{R}, |.|)$ ؟

الحـــل

نعلم أن $\sqrt{2} \notin Q$ ونبحث عن متتالية $\{q_n\}$ من عناصر Q بحيث $q_n \longrightarrow_{n\to\infty} \sqrt{2}$. فتكون Q غير مغلقة إذا وجدنا هذه المتتالية . لأنها تحقق المبرهنة السابقة . ويمكن البحث عن المتتالية بطريقتين :

ط 1) لتكن لدينا الدالة $\sqrt{x+1}$ إن نشرها :

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{2} . \frac{1}{4}\ x^2 + \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6}\ x^3 - \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6} . \frac{5}{8}\ x^4 + \cdots$$

$$|x| \le 1 \Rightarrow x \in [-1,1]$$

عندما $x = 1 \Leftarrow$ * $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \frac{1}{4} + \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6} - \cdots$

$$q_1 = 1 \ , \quad q_2 = 1 + \frac{1}{2} \ , \quad q_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ , \ldots.$$

$\{q_n\}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة * وتنتمي لـ Q ، $q_n \longrightarrow \sqrt{2} \notin Q$

فإن q_n ليست مغلقة .

ط 2) نعرف متتالية تدريجية $q_1 = \frac{3}{2}$ ، $q_{n+1} = \frac{q^2{}_n + 2}{2q_n}$

سنبرهن أن $q_n \longrightarrow_{n\to\infty} \sqrt{2}$. لنبرهن أولا أن : $q_{n+1} \le q_n$ ، $q^2{}_n \ge 2$ ((متناقصة))

بالاستقراء على n .

1) إن المتراجحة $q^2{}_n \ge 2$ صحيحة من أجل $n = 1$ ، $q^2{}_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \ge 2$

2) لنفرض صحتها من أجل n ، $q^2{}_n \ge 2$

3) لنبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، $q_{n+1} = \frac{q^2{}_n + 2}{2q_n} \Longrightarrow 2\, q_n\, q_{n+1} = q^2{}_n + 2$

$$(q_n - q_{n+1})^2 \ge 0$$
$$q^2{}_n - 2q_n q_{n+1} + q^2{}_{n+1} \ge 0$$
$$q^2{}_n + q^2{}_{n+1} \ge 2q_n q_{n+1}$$

$$q^2{}_n + 2 = 2\, q_n\, q_{n+1} \le q^2{}_n + q^2{}_{n+1}$$
$$\Longrightarrow q^2{}_n + 2 \le q^2{}_n + q^2{}_{n+1}$$
$$\Longrightarrow 2 \le q^2{}_{n+1}$$

إذا المتراجحة صحيحة مهما يكن $n \ge 1$

$$\Longrightarrow q^2{}_n \ge 2 \Longrightarrow q^2{}_n + q^2{}_n \ge q^2{}_n + 2$$

$$\Longrightarrow 2q^2{}_n \ge q^2{}_n + 2 \Longrightarrow q_n \ge \frac{q^2{}_n + 2}{2q_n}$$

$$\Longrightarrow q_n \ge q_{n+1}$$

إذا المتتالية q_n متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة من عدد ما وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} q_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^2{}_n + 2}{2q_n} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} q_n\right)^2 + 2}{2\lim\limits_{n\to\infty} q_n}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\alpha^2+2}{2\alpha} \Longrightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2 + 2 \Longrightarrow \alpha^2 = 2 \Longrightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow q_n \longrightarrow \sqrt{2} \notin Q$$

فإن Q غير مغلقة .

<u>تعميم</u>:) ليكن $k > 0$. توجد متتالية تدريجية هي $q_{n+1} = \frac{q^2{}_n + k}{2q_n}$ ، $q_0 = 1$

حيث تحقق : $q_n \longrightarrow \sqrt{k}$ ، $q_{n+1} \leq q_n$ ، $q^2{}_n \geq k$.)

لنرى إذا كانت مفتوحة أم لا :

ليكن $0 \in Q$ فإنه : $\nexists\, \varepsilon > 0 : N(0, \varepsilon) \subseteq Q$

أي لا يوجد عدد ε يحقق أن الكرة التي مركزها 0 محتواه في Q . <u>لنبحث</u> عن هذا العدد .

من الواضح أن $\frac{\sqrt{2}}{n_0} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ إذا : يمكن إيجاد n_0 كبير كفاية حيث $0 < \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon$

ولكن $\frac{\sqrt{2}}{n_0} \notin Q$ ، فهي ليست مفتوحة .

<u>تمرين :</u> ليكن (X, d) فضاء حيث $X = Q$ و $d : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x - y|$$

أثبت أن الفضاء (Q, d) غير تام .

الحـــل

((يكون فضاء تام إذا كانت كل متتالية كوشية فيه متقاربة)) ، إذا يجب إيجاد متتالية كوشية وغير متقاربة في Q ليكون $(Q\,,d)$ غير تام .

لنأخذ المتتالية $\{q_n\}$ في التمرين السابق إن : $\sqrt{2} \longrightarrow_{n\to\infty} q_n$ في $\mathbb{R}$. وهذه المتتالية عناصرها اعداد كسرية (من Q) .

$$\Rightarrow \left|q_n - \sqrt{2}\ \right| \longrightarrow_{n\to 0} 0$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,;\ \exists\, n_0 \in N^*\ : n \ge n_0 \Rightarrow |\, q_n - \sqrt{2}\ \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\, n\,, m \ge n_0 \ \Rightarrow\ d(\,q_n\,,q_m\,) = |\, q_n - q_m\,|$$

$$= \left|\, q_n - \sqrt{2} + \sqrt{2} - q_m \right|$$

$$\le |\, q_n - \sqrt{2}\ | + |\,\sqrt{2} - q_m\,|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,;\ \exists\, n_0 \in N^*\ ; n\,,m \ge n_0$$

$$\Rightarrow d(\,x_n\,,x_m\,) < \varepsilon$$

إذا المتتالية $\{q_n\}$ كوشية في Q .

بفرض أنها متقاربة من $q \in Q$ في $(Q\,,\ d)$

$$\Rightarrow\ q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q \ \Rightarrow d\,(\,q_n\,,q\,) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow\ |\,q_n - q\,| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

اصبحت متقاربة من $\sqrt{2}$ و q فإن $q \in Q = \sqrt{2} \notin Q$

و هذا مستحيل فإن $\{q_n\}$ ليست متقاربة في $(Q\,,d)$ و أن الفضاء $(Q\,,d\,)$ ليس تام .

تمرين : ليكن $(\,X\,,d\,)$ فضاء متري و $A\,,B \subseteq X$ فإن :

1) $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \overline{A} \subseteq \overline{B}$

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

الحـــل

1) ليكن $x \in \overline{A}$ فإن : $\forall \varepsilon > 0 \; ; \; N(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$$A \subseteq B \implies \emptyset \neq N(x,\varepsilon) \cap A \subseteq N(x,\varepsilon) \cap B$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \, ; N(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$$

$$\implies x \in \overline{B} \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

2) $$A \subseteq A \cup B \overset{\text{من } 1)}{\implies} \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \; \dots (1$$

$$B \subseteq A \cup B \overset{\text{من } 1)}{\implies} \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \; \dots (2$$

من 1) و 2) نجد : $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \quad \dots .*$

<u>**لنثبت الاحتواء المعاكس :**</u> ليكن $x \in \overline{A \cup B}$ فإن :

إذا كان $x \in \overline{A} \implies x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

ومنه $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ ويتم المطلوب .

وإذا كان $x \notin \overline{A}$ لنبرهن أن $x \in \overline{B}$

بما أن $x \notin \overline{A} \implies \exists \varepsilon > 0 \, ; N(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

وبما أن $x \in \overline{A \cup B}$ فإن :

$$\forall \varepsilon > 0 \, ; N(x,\varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$\implies (N(x,\varepsilon) \cap A) \cup (N(x,\varepsilon) \cap B) \neq \emptyset$$

إذا كان : $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \implies N(x,\varepsilon) \subseteq N(x,\varepsilon_0)$

$$\implies (N(x,\varepsilon) \cap A) \subseteq (N(x,\varepsilon_0) \cap A) = \emptyset$$

$$\implies N(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$$

$$\implies N(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$$

إذا كان $\varepsilon_0 < \varepsilon \implies N(x,\varepsilon_0) \subseteq N(x,\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \ \emptyset \neq N(x,\varepsilon_0) \cap B \subseteq N(x,\varepsilon) \cap B$$

$$\Longrightarrow N(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow N(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow x \in \overline{B}$$

$$\Longrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \quad \ldots .**$$

من * و ** نجد $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

تعريف محيط مجموعة في فضاء متري

ليكن (X, d) فضاء متري و $A \subseteq X$ مجموعة .

نقول أن محيط (جبهة) المجموعة A هي مجموعة كل النقاط الملاصقة لـ A و لـ $A^c = X \setminus A$

نرمز لهذه المجموعة بالرمز $Fr(A)$

$$Fr(A) = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A}) = \overline{A} \cap (\overline{A^c})$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو * آية اليافي * هالة مصطفى