نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة: الثامنة والتاسعة ◄ عنوان المحاضرة: التكامل العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

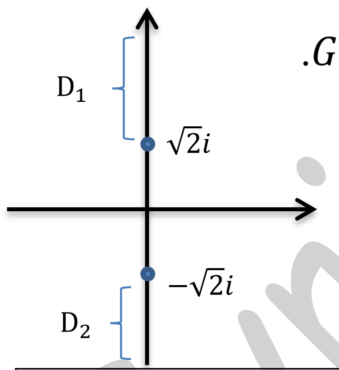
1- مجموعة تمارين
2- التكامل العقدي والمنحني العقدي
3- تكامل تابع عقدي لمتحول حقيقي

تمريـن: هل يوجد ل $f(z) = \frac{2z}{z^2+2}$ تابعا اصلي على المنطقة $G = \mathbb{C}\backslash A$

حيث $A = \{z = iy \;\; ; |y| \geq \sqrt{2}\}$

طريقة ثانية للسؤال: هل سيوجد فروع تحليلية على المنطقة G؟؟

الحـــل:



اذا وجد تابع أصلي ل f على G فإنه سيكون فرعا تحليليا ل $log(Z^2+2)$ على G.

بما أن $Z = iy$ أي ان $x = 0$

وبما أن $|y| \geq \sqrt{2} \iff y \geq \sqrt{2}$ أو $y \leq -\sqrt{2}$

$A = D_1 \cup D_2$

تذكرة : $|x| \geq r \iff$ إما $x \leq -r$ أو $x \geq r$

ان نقاط تفرع التابع $log(z^2+2)$ هي حلول $z^2+2=0$ أي هما النقطتان $z = \sqrt{2}i$ و $z = -\sqrt{2}i$

نلاحظ أنه في المنطقة G لايمكن الانطلاق من نقطة Z والعودة اليها بدورة كاملة حول أي من نقطتي التفرع دون قطع أحد نصفي المستقيمين D_1, D_2 (أي دون الخروج من المنطقة G).

بالتالي هناك فروع تحليلية لـ $log(z^2+2)$ على G المشتق لكل منها $\frac{2z}{z^2+2}$ وجميع هذه الفروع ستكون توابع اصلية للتابع f على G .

ملاحظة: log تابع لا نهائي القيم أما Log تابع وحيد القيمة

تمرين: عين منطقة تحليلية التابع $Log(z^2+2)$ (حيث Log هو الفرع الرئيسي التحليلي .ثم عين مشتق f على تلك المنطقة).

الحـــــل:

إن Log تحليلي على $\mathbb{C}\backslash ox^-$.

$g(z)=z^2+2$ تحليلي على $\mathbb{C}$.

ليكن التابع $f=Log\circ g$

(**مبرهنة :** اذا كان g تحليلي على A و h تحليلي على $g(A)$ فإن hog تحليلي عل A).

(إذا اخذنا منطقة يكون g تحليلي عليها فإن f سيكون قابلا للاشتقاق عند $z\in\mathbb{C}$ اذا وفقط انا كان $(g(z)\notin ox^-$

متى يكون $g(z)\in ox^-$ ومتى يتحقق هذا الكلام؟

$$g(z)\in ox^- \Leftrightarrow x^2-y^2+2+2xyi \ \in \mathbb{R}\text{-}$$

$$\Leftrightarrow (1)\ \ xy=0 \quad \wedge \ \ (2)\ \ x^2-y^2+2\leq 0$$

من (1) اما $x=0$ او $x\neq 0\ \wedge y=0$

إذا كانت $y=0$ فإن (2) تصبح $x^2+2\leq 0$ وهذه المتراجحة مستحيلة الحل

اذا كانت $x=0$ و $y\neq 0$ فإن (2) تصبح $-y^2+2\leq 0$ والاخيرة تكافئ $|y|\geq\sqrt{2}$

$$g(z)\in ox^- \quad\Leftrightarrow\quad z\in A=\{z=iy\ \ ;|y|\geq\sqrt{2}\}$$

$$g(z)\in\mathbb{C}\backslash ox^- \quad\Leftrightarrow\quad z\in\mathbb{C}\backslash A$$

أي ان منطقة تحليلية f هي $G=\mathbb{C}\backslash A$ لأن g تحليلي على $\mathbb{C}$ فهو تحليلي على $\mathbb{C}\backslash A$ وبما أن Log تحليلي على $\mathbb{C}\backslash ox^-$ و $g(G)\subseteq \mathbb{C}\backslash ox^-$

لإثبات $g(G)\subseteq \mathbb{C}\backslash ox^-$

$$w\in g(G) \Rightarrow \exists z\in G=\mathbb{C}\backslash A \ : g(z)=w \Rightarrow g(z)=w\in \mathbb{C}\backslash ox^-$$

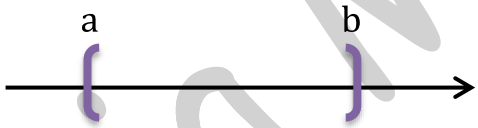
أصبح لدينا g تحليلي على $g(G)$ ومنه $f=Log\circ g$ تحليلي على G

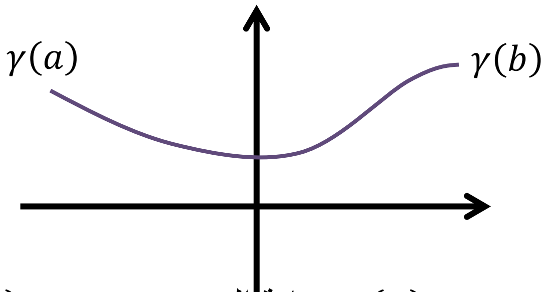
نعين المشتق على هذه المنطقة:

$$\forall z\in G \ : \quad f'(z)=\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{2z}{Z^2+2}$$

التكامل العقدي

تعريف المنحني العقدي: هو مجموعة المواضع المرتبة لقيمة تابع عقدي $\gamma(t)$ مستمر على مجال مغلق $[a,b]$ عندما تمسح t مجال من a الى b أي هو مسار $\gamma(t)$ عندما تمسح t مجال $[a,b]$ من بدايته الى نهايته.





نسمي $\gamma(a)$ بداية المنحني و نسمي $\gamma(b)$ نهاية المنحني ،ونقول أن المنحني موجه من $\gamma(a)$ الى $\gamma(b)$

اذا كانت $\gamma(a)=\gamma(b)$ نقول ان المنحني مغلق

كما نسمي التابع γ تمثيلا وسيطيا لذلك المنحني.

تكامل التابع العقدي لمتحول حقيقي

ليكن $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ تابعا عقديا لمتحول حقيقي عندئذ:

1- مجموعة تعريف γ تساوي تقاطع مجموعتي تعريف $x\,,y$

2- $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)$ موجودة $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to t_0}y(t)$ و $\lim_{t\to t_0}x(t)$ موجودة

فإن: $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=L: \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0}y(t)=ImL$ و $\lim_{t\to t_0}x(t)=ReL$

أي أن: $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=\lim_{t\to t_0}x(t)+i\lim_{t\to t_0}y(t)$

3- γ مستمر عند t_0 $\Leftrightarrow$ x,y مستمران عند t_0

4- γ مستمر على مجال I $\Leftrightarrow$ x,y مستمران على I

ملاحظة: نقول عن تابع انه مستمر عند نقطة يجب ان تكون هذه النقطة داخلية.

نقول عن تابع انه مستمر على مجال مغلق اذا كان مستمر عند كل نقطة من هذا المجال.

5- γ قابل للاشتقاق عند t_0 $\Leftrightarrow$ x,y قابلان للاشتقاق عند t_0

- واذا كان γ قابلا للاشتقاق فإن $\gamma'(t_0)=x'(t_0)+iy'(t_0)$
- ايضا اذا كان γ قابلا للاشتقاق على مجال مفتوح $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ x,y قابلان للاشتقاق على ذلك المجال
- اذا كان γ قابلا للاشتقاق على مجال مغلق $[a,b]$ يكافئ اذا كان γ قابلا للاشتقاق على مجال مفتوح $]a,b[$ وقابل للاشتقاق عند a من اليمين وعند b من اليسار

مثال: هل التابع $\gamma(t)$ قابل للاشتقاق

$$\gamma(t)=e^{it}\quad ;0\le t\le 2\pi$$

الحـــل:

$$\gamma(t)=cos(t)+isin(t)$$

$$x=cos(t)\quad ,x=sin(t)$$

ان γ قابل للاشتقاق عند $[0,2\pi]$ لان x,y قابلان للاشتقاق عند $[0,2\pi]$ لأن $cos(t)\,,sin(t)$ قابلان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهما قابلان للاشتقاق على اي مجال جزئي من $\mathbb{R}$.

ملاحظة: $e^{g(t)}$ قابل للاشتقاق على مجموعة قابلة اشتقاق الاس كما أن $\frac{d(e^{g(t)})}{dt}=g'(t)e^{g(t)}$

$$\gamma'(t)=\left(e^{it}\right)'=ie^{it}$$

$$\gamma'(t_0)=x'(t_0)+iy'(t_0)=-sin(t)+icos(t)$$

6- $F(t)$ تابع أصلي ل $f(t)$ على مجال I $\Leftrightarrow$ $F'(t)=f(t)\quad \forall t\in I$

$F(t)=X(t)+iY(t)$ تابع اصلي ل $f(t)=x(t)+iy(t)$ على مجال I

$\Leftrightarrow$ $X(t)$ تابع أصلي ل على I و $Y(t)$ تابع اصلي ل $y(t)$ على I.

مثال: $\mathrm{F(t)}=-\mathrm{sint}+\mathrm{iln(t)}$ هو تابع أصلي ل $f(t)=cost+i\frac{1}{t}$ على $]0,\infty[$

لو أخذنا قيمة مطلقة ل t في $ln\, t$ سوف يكون المجال $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$.

-7 $f(t)=x(t)+iy(t)$ كمول على مجال $[a,b]$ اذا كان $x(t)$ و $y(t)$ كمولا على $[a,b]$

كما أن $\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt+i\int_a^b y(t)\,dt$

مبرهنة: اذا كان f مستمر على $[a,b]$ فإن f كمول على $[a,b]$.

مبرهنة: اذا كان $f(t)$ مستمر على $[a,b]$ وكان $F(t)$ تابعا أصليا على $[a,b]$ فإن

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)=[F(t)]_a^b$$

مثال: احسب التكامل $\int_0^1\frac{1}{1+it}dt$

الحـل:

طريقة أولى:

$$\frac{1}{1+it}\overset{\text{الضرب بمرافق المقام}}{=}\frac{1-it}{1+t^2}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+it}dt=\int_0^1\frac{1-it}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-i\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$=[Argtg(t)]_0^1-i\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1=\left[\frac{\pi}{4}-0\right]-\frac{i}{2}[ln2-0]=\frac{\pi}{4}-i\frac{ln2}{2}$$

طريقة ثانية: $\int_0^1\frac{1}{1+it}dt=\frac{1}{i}[Log(1+it)]_0^1$

$$g(t)=1+it\quad\Longrightarrow\quad g([0,1])=[1,1+i]$$

نأخذ الفرع الرئيسي Log تحليلي على $\mathbb{C}\backslash ox^-$ فهو قابل للاشتقاق على $g([0,1])$

$\Leftarrow$ $(Log)\circ g$ قابل للاشتقاق على مجال $[0,1]$ ومشتقه: $\frac{d}{dt}\big(Log(1+it)\big)=\frac{i}{1+it}$

$\Leftarrow$ $F(t)=\frac{1}{i}Log(1+it)$ هو تابع اصلي ل $\frac{1}{1+it}$ على المجال $[0,1]$

((عند وجود log يجب أخذ الحذر كون التابع متعدد القيم))

$$\int_0^1 \frac{1}{1+it}dt=\frac{1}{i}[Log(1+it)]_0^1=\frac{1}{i}[Log(1+i)-Log(1)]$$

$$=\frac{1}{i}\left[\ln|1+i|+i\frac{\pi}{4}-0\right]=\frac{\pi}{4}-i\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}-i\frac{ln2}{2}$$

ملاحظة: ان e^{it} هو تركيب لتابعين الاول يقرن كل متحول حقيقي بعدد حقيقي و الثاني هو التابع الاسي العقدي الذي يقرن كل عدد عقدي بعدد عقدي $t_{\in\mathbb{R}}\xrightarrow{g} g(t)_{\in\mathbb{C}}\xrightarrow{e^z} e^{g(t)}$.

انتهت المحاضرة

إعداد:منى شغل – أحمد أبو التوت – نذير تيناوي