15-4-2018

نظري

◄ دكتور المادة: ملك ماورديني

◄ المحاضرة: العاشرة   عنوان المحاضرة: تطبيقات لابلاس

المحتوى العلمي :

١ـ حل تمارين لترسيخ افكار في المحاضرة السابقة

٢ـ سنتناول ايضا حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس.

٣ـ حل امثلة على ذلك ...

لنبدأ اصدقائي *_*

تمرين: حل المعادلة التفاضلية باستخدام تحويل لابلاس حيث:

$$y'' + y = e^t$$

التي تحقق الشروط: $y'(0) = 2 \ , \ y(0) = 0 \ ; t > 0$

الحل:

نطبق الخطوات السابقة:

$$L[y''] + L[y] = L[e^t]$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك ونعوض القيم $y'(0) = 2 \ \&\& \ y(0) = 0$

$$[S^2+1]Y(s) = \frac{1}{s-1} + 2 \to Y(s)[S^2+1] = \frac{1+2s-2}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \ \dots\dots\dots\dots (\$)$$

نوحد المقامات ونطابق الكسور ومنه:

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C}{(s-1)(s^2+1)}$$
$$\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{s^2(A+B) + s(C-B) + A - C}{(s-1)(s^2+1)}$$

نلاحظ أن أمثال s^2 معدومة في الطرف الأيسر لذلك :

$$A + B = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \ \ \&\& \ C - B = 2 \ldots\ldots\ldots (2) \ \&\& \ A - C = -1 \ldots\ldots.. (3)$$

نجمع (١) و (٢) نجد: $A + C = 2 \ldots\ldots\ldots (4)$ ومن (٤) نجد أن $-C = A - 2$

نعوض في (٣) نجد أن: $A = \frac{1}{2}$ وبالتالي نجد أيضاً: $B = -\frac{1}{2} \ \&\& \ C = \frac{3}{2}$

نعوض في ($) الثوابت:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}}{s^2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + -\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1} + \frac{\frac{3}{2}}{s^2+1}$$
$$L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)$$: و هو حل المعادلة التفاضلية

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y'' - 5y' + 6y = 1$ التي تحقق الشروط الآتية:

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad ; t > 0$$

الحل :

ناخذ تحويل لابلاس بالنسبة ل t $\quad L[y''] - 5L[y'] + 6L[y] = L[1]$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) - 5\big(SY(s) - y(0)\big) + 6Y(s) = \frac{1}{S}$$

نعوض القيم الابتدائية ونخرج $Y(s)$ عامل مشترك:

$$Y(s)[S^2 - 5S + 6] = \frac{1}{S} \to Y(s)(S-3)(S-2) = \frac{1}{S}$$

$$Y(s)=\frac{1}{S(S-2)(S-3)}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S-2}+\frac{C}{S-3}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نحصل على: $A=\frac{1}{6}\,,B=-\frac{1}{2}\,,C=\frac{1}{3}$ نعوض في الكسوروناخذ

تحويل لابلاس العكسي :

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{6}}{S}-\frac{\frac{1}{2}}{S-2}+\frac{\frac{1}{2}}{S-3}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right]-\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{S-2}\right]+\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{S-3}\right]$$

$y(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}$: وهو حل المعادلة التفاضلية

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''+y'=te^t$ التي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0)=y'(0)=0\quad ;t>0$$

الحل:

$$L[y'']+L[y']=L[te^t]$$

$$S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)+SY(s)-y(0)=\frac{1}{(S-1)^2}$$

وبتعويض القيم الابتدائية $S^2Y(s)+SY(s)=\frac{1}{(S-1)^2}$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك ومنه: $Y(s)[S^2+S]=\frac{1}{(S-1)^2}$

$$Y(s)=\frac{1}{S(S+1)(S-1)^2}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S+1}+\frac{C}{S-1}+\frac{D}{(S-1)^2}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد: $A=1\,,B=-\frac{1}{4}\,,C=-\frac{3}{4}\,,D=\frac{1}{2}$ نعوض في الكسور

$$Y(s)=\frac{1}{S}+\frac{\frac{1}{4}}{S+1}-\frac{\frac{3}{4}}{S-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(S-1)^2}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{S+1}\right]-\frac{3}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{S-1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(S-1)^2}\right]$$

و هو حل المعادلة التفاضلية: $y(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{2}te^{t}$

مثال: **أوجد حل المعادلة التفاضلية** $y'' + 2y' + y = e^{-2t}$ التي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0) = y'(0) = 0$$

الحل:

$$L[y''] + 2L[y'] + L[y] = L[e^{-2t}]$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) + 2SY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{S+2}$$

نعوض القيم الابتدائية : $S^2Y(s) + 2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{S+2}$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك : $Y(s)[S^2 + 2S + 1] = \frac{1}{S+2} \to Y(s)(S+1)^2 = \frac{1}{S+2}$

$$Y(s) = \frac{1}{(S+2)(S+1)^2} = \frac{A}{S+2} + \frac{B}{S+1} + \frac{C}{(S+1)^2}$$

بتوحيد المقامات و المطابقة نجد : $A = 1\,, B = -1\,, C = 1$ نعوض في الكسور

$$Y(s) = \frac{1}{S+2} - \frac{1}{S+1} + \frac{1}{(S+1)^2}$$

بأخذ التحويل العكسي:

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{S+2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{S+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2}\right]$$

و هو حل المعادلة التفاضلية : $y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$

- حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس.

لتكن لدينا الدالة $z(x,t)$ التابعة للمتغيرين المستقلين x, t فإننا نسمي :

$$\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

بالمشتقات الجزئية للدالة z بالنسبة ل x,t (من المرتبة الأولى والثانية)بالنسبة لهذه المتغيرات بالمعادلة الجزئية.

حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس **تعتمد على الخواص التالية:**

١) خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة ل t:

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = SZ(x,S) - z(x,0)$$

٢) خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة ل t :

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] = S^2 Z(x,S) - Sz(x,0) - z'(x,0)$$

٣) خاصية المفاضلة بالنسبة ل x من المرتبة الأولى:

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial z(x,S)}{\partial x} = z'(x,S)$$

٤)خاصية المفاضلة بالنسبة ل x من المرتبة الثانية:

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 Z(x,S)}{\partial x^2} = Z''(x,S)$$

تمرين: باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial z}{\partial t} + x\frac{\partial z}{\partial x} = x \quad ; \; z(x,0) = z(0,t) = 0 \;\&\&\; x,t > 0$$

الحل:

في البداية نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة ل t فإن أي متغير آخر يعتبر ثابت نخرجه خارج التحويل:

$$L\left[\frac{d\varepsilon}{dt}\right] + x\,L\left[\frac{dz}{dx}\right] = L[x]$$

$$SZ(x,S) - z(x,0) - xZ'(x,S) = \frac{x}{S} \xRightarrow{\text{لدينا شروط البدء } z(x,0)=0}$$

$$xZ'(x,S) + SZ(x,S) = \frac{x}{S} \xRightarrow{\text{نقسم الطرفين على } x} Z'(x,S) + \frac{S}{x}Z(x,S) = \frac{1}{S}$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية من الشكل:

$$Z' + pZ = q : p = \frac{S}{x} \ \ \&\& \ \ q = \frac{1}{S}$$

ونعلم أن حلها العام من الشكل:

$$Z = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx + c\right] =$$

$$e^{-\int \frac{S}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{S}{x}dx}.\frac{1}{S}dx + c\right] = e^{-Slnx}\left[\int e^{Slnx}.\frac{1}{S}dx + c\right] =$$

$$Z = e^{\ln x^{-S}}\left[\int e^{\ln x^{S}}.\frac{1}{S}dx + c\right] = x^{-S}\left[\frac{x^{S+1}}{S+1} + c\right] \rightarrow$$

$$Z = \frac{x}{S(S+1)} + \frac{c}{x^S} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

لمعرفة قيمة الثابت c نستخدم الشرط الابتدائي الثاني لدينا القانون:

$$Z(0,S) = \int_0^\infty z(0,t)e^{-St}dt = 0 \xRightarrow{\text{لأن } z(0,t)=0} Z(0,S) = 0 : x = 0 \text{عندما}$$

نعوض الآن في (1) ومنه:

$$0 = \frac{0}{S(S+1)} + \frac{c}{0^s} \rightarrow c = 0 \rightarrow Z(x,S) = \frac{x}{S(S+1)}$$

الآن نفرق الكسر ثم نأخذ تحويل لابلاس العكسي بالنسبة ل t ولكن كون x يعتبر ثابت بالنسبة لt فإن:

$$L^{-1}[Z(x,S)] = xL^{-1}\left[\frac{1}{S(S+1)}\right] = xL^{-1}\left[\frac{A}{S} + \frac{B}{S+1}\right]$$

$$= xL^{-1}\left[\frac{AS + A + BS}{S(S+1)}\right] \rightarrow xL^{-1}\left[\frac{(A+B)S + A}{S(S+1)}\right] \xRightarrow{\text{بالمطابقة نجد أن}}$$

$$A + B = 0 \ \&\& A = 1 \rightarrow B = -1$$

$$L^{-1}[Z(x,S)] = xL^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] + xL^{-1}\left[-\frac{1}{S+1}\right] = x - e^{-t}$$

الانسان العادي لايهتم لمرور الوقت لكن الانسان الموهوب يقاد به . . . .

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نص الله*علا الدالاتي*دعاء الرحيل