حل أسئلة الدورات

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٧)

السؤال الاول : إذا كانت J مثالية في حلقة تبديلية واحدية ما $(R,+,.)$ وإذا عرفنا على عناصر المجموعة

$$R\backslash J=\{x+J \ : \ x\in R\}$$

العمليتين الجبريتين التاليتين بالشكل الاتي $\forall x,y\in R$

$$(x+J)+(y+J)=(x+y)+J$$
$$(x+J).(y+J)=(x.y)+J$$

أثبت أن $(R\backslash J,+,.)$ تشكل حلقة تبديلية وبمحايد أيضاً .

السؤال الثاني : اذا كانت $(R,+,.)$ حلقة تبديلية وواحدية واذا كان $a\in R$ عنصراً مغايراً للصفر برهن انه اذا كان العنصر a قابلاً للقلب في R فإن مقلوبة وحيد.

السؤال الثالث : ليكن $\varphi: R\longrightarrow S$ حيث $S=(Z_n,\oplus,\otimes)$, $R=(Z,+,.)$ معرفاً بالشكل

$$\forall a\in R \quad ; \quad \varphi(a)=a=(a \ mod \ n)$$

اثبت أن φ تشاكل حلقي وأوجد نواته .

السؤال الرابع : لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية وتامة وليكن S مجموعة كل كثيرات الحدود على الحلقة R واذا كانت $*,\Delta$ عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على المجموعة S بالشكل الآتي :

$$(a_n)*(b_n)=(a_n+b_n)$$

$$(a_n)\Delta(\mathrm{b_n})=r_n \quad ; \quad r_n=\sum_{i+j=n} a_i.b_j \quad : \quad n=0,1,2,,,,,$$

اثبت أن $(S,*,\Delta)$ حلقة تامة .

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٧)

السؤال الأول

كون $\boldsymbol{R}$ حلقة فإن $\boldsymbol{0 \in R}$ ومنه $\boldsymbol{0 + J \in R \backslash J \neq \emptyset}$

$$\forall \boldsymbol{x + J \ , \ y + J \ , \ z + J \in R \backslash J}$$

عملية الجمع $(+)$ داخلية لأن:

$$(x + J) + (y + J) = (x + y) + J$$

كون R حلقة فإن الجمع مغلق في R ومنه $x + y \in R$ ومنه $(x + y) + J \in R \backslash J$

عملية الجمع $(+)$ تجميعية في $\boldsymbol{R \backslash J}$ لأن:

$$[(x + J) + (y + J)] + (z + J) = [(x + y) + z] + J = [x + (y + z)] + J$$
$$= (x + J) + [(y + z)] + J] = (x + J) + [(y + J) + (z + J)]$$

يوجد محايد بالنسبة لعملية الجمع في الحلقة $R \backslash J$ وهو $0 + J$ لأن:

$$(0 + J) + (x + J) = (0 + x) + J = x + J$$
$$(x + J) + (0 + J) = (x + 0) + J = x + J$$

يوجد لكل عنصر في $R \backslash J$ نظير جمعي في $\boldsymbol{R \backslash J}$ لأن:

ليكن $x + J \in R \backslash J$ ومنه $x \in R$ وبالتالي $-x \in R$ ويحقق:

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

ومنه يوجد $(-x) + J \in R \backslash J$ ويحقق:

$$(x + J) + (-x + J) = \big(x + (-x)\big) + J = 0 + J = J$$
$$(-x + J) + (x + J) = \big((-x) + x\big) + J = 0 + J = J$$

عملية الجمع $(+)$ تبديلية في $\boldsymbol{R \backslash J}$ لأن:

$$\forall x + J \ , \ y + J \ \in R \backslash J$$
$$(x + J) + (y + J) = (x + y) + J = (y + x) + J = (y + J) + (x + J)$$

عملية الضرب داخلية في $\boldsymbol{R \backslash J}$ لأن:

$$\forall x + J \ , \ y + J \ , \ z + J \in R \backslash J$$
$$(x + J).(y + J) = (x.y) + J$$

كون R حلقة فإن الضرب مغلق في R ومنه $x.y \in R$ ومنه $(x.y) + J \in R \backslash J$

يوجد حيادي ضربي في $\boldsymbol{R \backslash J}$ وهو $\boldsymbol{1 + J}$ لأن:

بما أن الحلقة R واحدية فإن $1 \in R$ وبالتالي $1 + J \in R \backslash J$ وبالتالي

$$(1 + J).(x + J) = (1.x) + J = x + J$$
$$(x + J).(1 + J) = (x.1) + J = x + J$$

عملية الضرب تجميعية في $R\backslash J$ لأن:

$$[(x+J).(y+J)].(z+J) = [(x.y)+J].(z+J) = ((x.y).z)+J$$
$$= \big(x(y.z)\big)+J = (x+J)\big((y.z)+J\big)$$
$$= (x+J).\big((y+J)(z+J)\big)$$

عملية الضرب توزيعية على الجمع في $R\backslash J$ من اليمين واليسار لأن:

$$(x+J)[(y+J)+(z+J)] = (x+J)[(y+z)+J] = [x(y+z)]+J$$
$$= [xy+xz]+J = [(xy)+J]+[(xz)+J]$$

$$[(y+J)+(z+J)](x+J) = [(y+z)+J](x+J) = [(y+z).x]+J$$
$$= [yx+zx]+J = [(yx)+J]+[(zx)+J]$$

مما سبق نجد أن R\J حلقة . وهي تبديلية لأن:

$$(y+J)(x+J) = (y.x)+J = (x.y)+J = (x+J)(y+J)$$

وبالتالي نجد أن الثلاثية $(R\backslash J,+,.)$ حلقة واحدية تبديلية .

السؤال الثاني

بفرض أن a عنصراً قابلاً للقلب في R ولنفرض أن كلاً من العنصرين v,u مقلوب للعنصر a في R بالتالي: $\begin{bmatrix} v.a = a.v = 1 \\ u.a = a.u = 1 \end{bmatrix}$

لنبرهن أن $v = u$

$$u = 1.u = (v.a)u = v(a.u) = v.1 = v$$

أي أن مقلوب العنصر a وحيد .

السؤال الثالث

$$\forall x,y \in R$$
$$\varphi(x+y) = (x+y)mod\ n = x\ mod\ n + y\ mod\ n = \varphi(x)+\varphi(y)$$
$$\varphi(x.y) = (x.y)mod\ n = (x\ mod\ n).(y\ mod\ n) = \varphi(x).\varphi(y)$$

ومنه φ تشاكل حلقي

$$\boldsymbol{ker}(\varphi) = \{x : x \in R\ \ ;\ \ \varphi(x) = 0\}$$

$$[\varphi(x) = 0] \Leftrightarrow [\boldsymbol{xmod\ n = 0}] \Leftrightarrow [\boldsymbol{x = nt}\ \ ;\ \ \boldsymbol{t \in Z}] \Leftrightarrow [\boldsymbol{x \in nZ}]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{ker}(\varphi) = nZ$$

السؤال الرابع

$$\forall \boldsymbol{a_n, b_n, c_n \in S}$$

العملية $(*)$ داخلية في S لأن:

$$(a_n)*(b_n)=(a_n+\mathrm{b_n})\in S$$

العملية $(*)$ تجميعية في S لأن:

$$\big((a_n)*(b_n)\big)*(c_n)=\big((a_n+b_n)\big)+(c_n)=(a_n)+\big((b_n)+(c_n)\big)$$
$$=(a_n)*\big((b_n)*(c_n)\big)$$

يوجد حيادي بالنسبة للعملية $(*)$ في S لأن:

$$(a_n)*(0)=(a_n+0)=a_n$$
$$(0)*(a_n)=(0+a_n)=a_n$$

يوجد نظير بالنسبة للعملية $(*)$ في S لأن:

$$(a_n)*(-a_n)=(a_n+(-a_n))=0$$
$$(-a_n)*(a_n)=((-a_n)+a_n)=0$$

العملية $(*)$ تبديلية في S لأن:

$$(a_n)*(b_n)=(a_n+b_n)=(b_n+a_n)=(b_n)*(a_n)$$

ومنه فإن $(S,*)$ زمرة تبديلية.

العملية (Δ) داخلية في S لأن:

$$(a_n)\Delta(b_n)=r_n\quad;\quad r_n=\sum_{i+j=n}a_i.b_j\quad:\quad n=0,1,2,,,,,$$

ومنه $(r_n)\in S$

العملية (Δ) تجميعية في S لأن:

$$(a_n)\Delta[(\mathrm{b_n})\Delta(c_n)]=[(a_n)\Delta(\mathrm{b_n})]\Delta(c_n)$$

من أجل الطرف الأول لنفرض أن $w_n=(\mathrm{b_n})\boldsymbol{\Delta}(c_n)$ وأن $(a_n)\boldsymbol{\Delta}(w_n)=u_n$

عندئذ من أجل عدد صحيح وليكن $n\geq 0$ يكون لدينا

$$u_n=\sum_{i+q=n}a_i.w_q\quad=\sum_{i+q=n}a_i.\left(\sum_{j+k=q}b_j.c_k\right)$$

$$=\sum_{i+q=n}\ \sum_{j+k=q}a_i.\left(b_j.c_k\right)=\sum_{i+j+k=n}a_i.b_j.c_k$$

من أجل الطرف الثاني لنفرض أن $r_n=(a_n)\Delta(b_n)$ وأن $(r_n)\boldsymbol{\Delta}(c_n)=v_n$

عندئذ من أجل عدد صحيح وليكن $n\geq 0$ يكون لدينا

$$v_n=\sum_{h+k=n}r_h.c_k=\sum_{h+k=n}\Big(\sum_{i+j=h}a_i\,.b_j\Big).c_k$$

$$= \sum_{h+k=n} \sum_{i+j=h} a_i.(b_j.c_k) = \sum_{i+j+k=n} a_i.b_j.c_k$$

ومنه $u_n = v_n$ وبالتالي $(S , \boldsymbol{\Delta})$ شبه زمرة.

العملية (Δ) توزيعي على $(*)$ في $\boldsymbol{S}$ لأن:

$$(a_n)\Delta[(b_n) * (c_n)] = (a_n)\Delta[(b_n) + (c_n)] = S_n$$

ونريد اثبات أن

$$\left[\underbrace{(a_n)\Delta(\mathrm{b_n})}_{r_n}\right] * \underbrace{[(a_n)\Delta(c_n)]}_{t_n} = r_n + t_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i+j=n} a_i.(b_j + c_j) = \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i.b_j}_{r_n} + \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i.c_j}_{t_n}$$

$$= r_n + t_n = r_n * t_n$$

بنفس الطريقة نبرهن على أن Δ توزيعي على $*$ من اليمين .

ومنه $(\mathbf{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ حلقة

بما أن الحلقة $(R,+,.)$ بمحايد فإنه عنصر الوحدة هو الواحد $0 \neq 1 \in R$

وبالتالي نجد أن يوجد $\mathrm{I_n} = 1$ ويحقق:

$$(a_n)\Delta(I_n) = a_n$$
$$(I_n)\Delta(a_n) = a_n$$

بالتالي الحلقة $(S,*,\Delta)$ حلقة بمحايد .

كما أن S خالية من القواسم الصفرية لأن:

$$\forall a_n, b_n \in S \quad ; \quad a_n\Delta b_n = 0$$

ومنه نجد أن $deg(a_n\Delta b_n) = deg(0) = \infty$

ولما كانت $\boldsymbol{R}$ حلقة تامة فإن $deg(a_n\Delta b_n) = deg(a_n) + deg(b_n)$

بالتالي $deg(a_n) + deg(b_n) = deg(0) = \infty$

بالتالي إما $deg(a_n) = \infty$ أو $deg(b_n) = \infty$

بالتالي إما $\boldsymbol{a_n = 0}$ أو $\boldsymbol{b_n = 0}$

بالتالي نجد أن $(\boldsymbol{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ حلقة تامة.

انتهى حل الدورة...

أسئلة الدورة الفصلية التكميلية (٢٠١٧)

السؤال الاول :

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وواحدية وليكن A, B مثاليين في $\mathcal{R}$ محققاً $\mathcal{R} = A + B$ أثبت أن $A.B = A \cap B$

السؤال الثاني :

ليكن $(\mathcal{R}, +, .)$ حلقة أثبت اذا كان $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ مثاليين في $\mathcal{R}$ فإن $\mathcal{N}.\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.

السؤال الثالث :

ليكن $(\mathcal{R}, +, .)$ حلقة واذا كان a عنصراً من مركز الحلقة $Z(\mathcal{R})$ أثبت أن التطبيق $\varphi: \mathcal{R}(X) \longrightarrow \mathcal{R}$ المعرف بالشكل $\varphi[f(x)] = f(a)$ يشكل تشاكل حلقي ؟

السؤال الرابع :

ليكن لدينا $(\mathcal{R}, +, .), (S, T, *)$ حلقتين واحديتين واذا كان φ تشاكل للحلقة $(\mathcal{R}, +, .)$ في الحلقة $(S, T, *)$ أثبت أن $(ker\varphi, +, .)$ هو حلقة جزئية من $(\mathcal{R}, +, .)$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية التكميلية (٢٠١٧)

السؤال الأول

حسب مبرهنة تقول إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وكان A, B مثاليين في $\mathcal{R}$ فإن $A.B \subseteq A \cap B$

والآن سوف نثبت الاحتواء المعاكس لكي تتحقق المساواة .

ليكن $x \in A \cap B$ بما أن $\mathcal{R} = A + B$ فرضاً وأن $1 \in \mathcal{R}$ لأنها حلقة واحدية فإنه يوجد

$$1 = a + b \quad : a \in A \quad , \quad b \in B$$

نضرب الطرفين بالعنصر x :

$$x = \underbrace{ax}_{\in A.B} + \underbrace{bx}_{\in A.B} \in A.B \implies x \in A.B$$

$$\Rightarrow A \cap B \subseteq A.B$$

$$\Rightarrow A \cap B = A.B$$

السؤال الثاني

بفرض أن $\mathcal{N},\mathcal{M}$ مثاليين في $\mathcal{R}$ عندئذٍ $\mathcal{N}\cap\mathcal{M}$ مثالي في $\mathcal{R}$ وايضاً $\mathcal{N}.\mathcal{M}$ مثالي في $\mathcal{R}$.
وذلك لان تقاطع مثاليتين هو مثالي وايضاً ضرب مثاليتين هو مثالي .
ليكن $x\in\mathcal{N}.\mathcal{M}$ عندئذٍ $x=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ بحيث $a_i\in\mathcal{N}\ ,b_i\in\mathcal{M}$

- وبالتالي $a_ib_i\in\mathcal{N}.\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}.\mathcal{R}\subseteq\mathcal{N}$ **(لأن $\mathcal{N}$ مثالي)**

ولما كانت $\mathcal{N}$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع فهي مغلقة فإن $x=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\in\mathcal{N}$

- ومن جهة أخرى $a_ib_i\in\mathcal{N}.\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}.\mathcal{R}\subseteq\mathcal{M}$ **(لأن $\mathcal{M}$ مثالي)**

ولما كانت $\mathcal{M}$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع فهي مغلقة فإن :

$$x=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\in\mathcal{M}\Longrightarrow x\in\mathcal{N}\cap\mathcal{M}$$

السؤال الثالث

ليكن $f(x)=a_0+a_1x+\cdots\ldots.\ \ ,\ g(x)=b_0+b_1x+\cdots\ldots.$
كثيرتي حدود من $\mathcal{R}(X)$ ولنطبق **شرطي التشاكل الحلقي** عندئذ يكون

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots\ldots.$$

ومنه يكون

$$\varphi[f(x)+g(x)]=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)a+\cdots\ldots.$$
$$=(a_0+a_1a+\cdots\ldots)+(b_0+b_1a+\cdots\ldots)$$
$$=\varphi[f(x)]+\varphi[g(x)]$$

كما أن :

$$f(x).g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\ldots.$$

حيث أن لكل c_k و $k\geq 0$ المعامل c_k بالنسبة ل x^k يعطى بالشكل :

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\cdots..+a_kb_0$$

وبما أن العنصر a هو من الحلقة $\mathcal{R}$ فيكون لدينا

$$\varphi[f(x)].\varphi[g(x)]=(a_0+a_1a+a_2a^2+\cdots).(b_0+b_1a+b_2a^2+\cdots)$$

ننشر ونجمع الحدود حسب درجة a ومن ثم خرج a عامل مشترك

$$=a_0b_0+(a_0b_1a+a_1ab_0)+(a_0b_2a^2+a_1ab_1a+a_2a^2b_0)+\cdots.$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)a+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)a^2+\cdots.$$
$$=c_0+c_1a+c_2a^2$$
$$=\varphi[f(x).g(x)]$$

ومنه φ تشاكل حلقي .

السؤال الرابع

نعرف $ker\varphi$ بالشكل التالي

$$ker\varphi = \{x \ : \ x \in \mathcal{R} \ : \ \varphi(x) = 0\}$$

بما أن $0 \in \mathcal{R}$ فإن $\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow 0 \in ker\varphi \Rightarrow ker\varphi \neq \emptyset$$

ليكن $x, y \in ker\varphi$ عندئذٍ $x, y \in \mathcal{R}$ ومنه $x.y \in \mathcal{R}$

بالإضافة إلى $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ (اي **عنصر موجود في $ker\varphi$ صورته تساوي الصفر**)

$$\varphi(x-y) = \varphi(x)T\varphi(-y) = 0T0 = 0 \Longrightarrow x - y \in \boldsymbol{ker\varphi}$$

صورة $x - y$ تساوي صفر فإن هذا العنصر ينتمي ل $\boldsymbol{ker\varphi}$ حسب تعريف $\boldsymbol{ker\varphi}$.

$$\varphi(x.y) = \varphi(x) * \varphi(y) = 0 * 0 = 0 \Longrightarrow x.y \in \boldsymbol{ker\varphi}$$

صورة $x.y$ تساوي صفر فإن هذا العنصر ينتمي ل $\boldsymbol{ker\varphi}$ حسب تعريف $\boldsymbol{ker\varphi}$.

ومنه $\boldsymbol{ker\varphi}$ حلقة جزئية .

انتهى حل الدورة...

أسئلة الدورة الفصلية الاولى (٢٠١٨)

السؤال الاول : ليكن J مثالية في الحلقة $(R, +, .)$ أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية J أولية في الحلقة $(R, +, .)$ هو أن لا تحوي الحلقة $(R/J, +, .)$ قواسم الصفر .

السؤال الثاني : ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $e \in \mathcal{R}$ عنصر جامد أثبت أن $r(e) = (1-e)\mathcal{R}$.

السؤال الثالث : ليكن I, J, K مثاليات يسارية (يمينية) في حلقة ما ولتكن $(R, +, .)$ واذا كان $I \subseteq K$ أثبت أن

$$I + (J \cap K) = (I + J) \cap K$$

السؤال الرابع : لتكن $(R, +, .)$ حلقة واحدية وتامة وليكن S مجموعة كل كثيرات الحدود على الحلقة R واذا كانت $*, \Delta$ عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على المجموعة S بالشكل الآتي :

$$(a_n) * (b_n) = (a_n + b_n)$$

$$(a_n)\Delta(b_n) = r_n \quad ; \quad r_n = \sum_{i+j=n} a_i . b_j \quad : \quad n = 0,1,2,,,,,$$

اثبت أن $(\boldsymbol{S}, *, \Delta)$ حلقة تامة .

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الاولى (٢٠١٨)

السؤال الأول

لزوم الشرط : لنفرض أن J أولية في الحلقة $(R,+,.)$ و لنبرهن أن الحلقة $(R/J,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر .

لنفرض جدلاً أن R/J تحوي قواسم الصفر وبالتالي يوجد عنصرين x,y من R بحيث يكون

$$x+J\neq J \quad , \qquad y+J\neq J$$

اي $(x+J).(y+J)=J$

ونعلم أن $x.y+J=J$

اي أن $x.y\in J$

وبما أن J أولية في الحلقة $(R,+,.)$ فرضاً فإنه اما $y\in J \quad \vee \quad x\in J$ وهذا يؤدي الى أن

$$x+J=J \quad \vee \quad y+J=J$$

وهذا مخالف لأن

$$x+J\neq J \quad , \qquad y+J\neq J$$

وبالتالي الحلقة $(R/J,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر .

كفاية الشرط : لنفرض أن الحلقة $(R/J,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر و لنبرهن أن J أولية في الحلقة $(R,+,.)$

ليكن x,y من R بحيث $x.y\in J$ ومنه $x.y+J=J$ وبالتالي

$$x.y+J=(x+J).(y+J)=J$$

وكون R/J لا تحوي قواسم الصفر فإنه

$$x+J=J \quad \vee \quad y+J=J$$

وبالتالي فإنه اما $y\in J \quad \vee \quad x\in J$ اذاً **مثالية أولية** J .

السؤال الثاني

سنبرهن أن $r(e)=(1-e)\mathcal{R}$: $r(e)=\{x: x\in\mathcal{R}\,;ex=0\}$

ليكن $x\in r(e)$ حيث $r(e)$ هو العادم اليميني عندئذٍ: $ex=0$

ومن جهة أخرى $1=1+e-e$

نضرب الطرفين بـ x $\Leftarrow$ $x=\underbrace{ex}_{=0}+(1-e)x$

$$x=(1-e)x\in(1-e)\mathcal{R}\Rightarrow x\in(1-e)\mathcal{R}$$

وبالتالي $r(e) \subseteq (1-e)\mathcal{R}$

ومن جهة ثانية ليكن $y \in (1-e)\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد $r \in \mathcal{R}$ بحيث $y = (1-e)r$ نضرب الطرفين بـ e $\Leftarrow$

$$ey = e(1-e)r = \Big(e - \underbrace{e^2}_{e^2=e \text{ حسب تعريف العنصر الجامد}}\Big)r = (e-e)r = 0 \Rightarrow ey = 0$$

$$\Rightarrow y \in r(e)$$

وبالتالي $(1-e)\mathcal{R} \subseteq r(e)$

$r(e) = (1-e)\mathcal{R} \Leftarrow$

السؤال الثالث

لنبرهن على الاحتوائين : ليكن

$$x \in K \cap (J+I) \Rightarrow \begin{cases} x \in K \\ \text{و} \\ x = j + i : j \in J \ , i \in I \end{cases}$$

$$\Rightarrow j = \underbrace{x}_{\in K} - \underbrace{i}_{\in I \subseteq K} \Rightarrow j \in K$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{j}_{\in K\cap J} + \underbrace{i}_{\in I} \in (K \cap J) + I$$

$$\Rightarrow K \cap (J+I) \subseteq (K \cap J) + I$$

***الاحتواء المعاكس* : ليكن**

$$y \in (K \cap J) + I \Rightarrow y = a + i \ ; \ a \in K \cap J \ , i \in I$$

إن $y = \underbrace{a}_{\in K} + \underbrace{i}_{\in I \subseteq K} \in K$

وكذلك $y = \underbrace{a}_{\in J} + \underbrace{i}_{\in I} \in J + I$

$$\Rightarrow y \in K \cap (J+I)$$

$$\Rightarrow (K \cap J) + I \subseteq K \cap (J+I)$$

من الاحتوائين تحققت المساواة نجد : $K \cap (J+I) = (K \cap J) + I$

السؤال الرابع

$$\forall a_n, b_n, c_n \in S$$

العملية $(*)$ داخلية في S لأن:

$$(a_n) * (b_n) = (a_n + b_n) \in S$$

العملية $(*)$ تجميعية في S لأن:

$$((a_n) * (b_n)) * (c_n) = ((a_n + b_n)) + (c_n) = (a_n) + ((b_n) + (c_n))$$
$$= (a_n) * ((b_n) * (c_n))$$

يوجد حيادي بالنسبة للعملية $(*)$ في S لأن:

$$(a_n) * (0) = (a_n + 0) = a_n$$
$$(0) * (a_n) = (0 + a_n) = a_n$$

يوجد نظير بالنسبة للعملية $(*)$ في S لأن:

$$(a_n) * (-a_n) = (a_n + (-a_n)) = 0$$
$$(-a_n) * (a_n) = ((-a_n) + a_n) = 0$$

العملية $(*)$ تبديلية في S لأن:

$$(a_n) * (b_n) = (a_n + b_n) = (b_n + a_n) = (b_n) * (a_n)$$

ومنه فإن $(S,*)$ زمرة تبديلية.

العملية (Δ) داخلية في S لأن:

$$(a_n)\Delta(b_n) = r_n \quad ; \quad r_n = \sum_{i+j=n} a_i . b_j \quad : \quad n = 0,1,2,,,,,$$

ومنه $(r_n) \in S$

العملية (Δ) تجميعية في S لأن:

$$(a_n)\Delta[(b_n)\Delta(c_n)] = [(a_n)\Delta(b_n)]\Delta(c_n)$$

من أجل الطرف الأول لنفرض أن $w_n = (b_n)\boldsymbol{\Delta}(c_n)$ وأن $(a_n)\boldsymbol{\Delta}(w_n) = u_n$

عندئذ من أجل عدد صحيح وليكن $n \geq 0$ يكون لدينا

$$u_n = \sum_{i+q=n} a_i . w_q \quad = \sum_{i+q=n} a_i . \left(\sum_{j+k=q} b_j . c_k \right)$$

$$= \sum_{i+q=n} \sum_{j+k=q} a_i . (b_j . c_k) = \sum_{i+j+k=n} a_i . b_j . c_k$$

من أجل الطرف الثاني لنفرض أن $r_n = (a_n)\Delta(\mathrm{b}_n)$ وأن $(r_n)\boldsymbol{\Delta}(c_n) = v_n$

عندئذ من أجل عدد صحيح وليكن $n \geq 0$ يكون لدينا

$$v_n = \sum_{h+k=n} r_h . c_k = \sum_{h+k=n} (\sum_{i+j=h} a_i . b_j). c_k$$
$$= \sum_{h+k=n} \sum_{i+j=h} a_i . (b_j . c_k) = \sum_{i+j+k=n} a_i . b_j . c_k$$

ومنه $u_n = v_n$ وبالتالي (S , Δ) شبه زمرة.

العملية (Δ) توزيعي على $(*)$ في S لأن:

$$(a_n)\Delta[(b_n) * (c_n)] = (a_n)\Delta[(b_n) + (c_n)] = S_n$$

ونريد اثبات أن

$$\left[\underbrace{(a_n)\Delta(b_n)}_{r_n}\right] * \underbrace{[(a_n)\Delta(c_n)]}_{t_n} = r_n + t_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i+j=n} a_i . (b_j + c_j) = \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i . b_j}_{r_n} + \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i . c_j}_{t_n}$$
$$= r_n + t_n = r_n * t_n$$

بنفس الطريقة نبرهن على أن Δ توزيعي على $*$ من اليمين. **ومنه $(S,*,\Delta)$ حلقة**

كما أن الحلقة تحوي المحايد وذلك لان $(R,+,.)$ بمحايد فإنه عنصر الوحدة هو الواحد $0 \neq 1 \in R$ وبالتالي نجد أن يوجد $I_n = 1$ ويحقق:

$$(a_n)\Delta(I_n) = a_n$$
$$(I_n)\Delta(a_n) = a_n$$

بالتالي الحلقة $(S,*,\Delta)$ حلقة بمحايد .

كما أن S خالية من القواسم الصفرية لأن:

$$\forall a_n, b_n \in S \quad ; \quad a_n \Delta b_n = 0$$

ومنه نجد أن $deg(a_n \Delta b_n) = deg(0) = \infty$

ولما كانت $\boldsymbol{R}$ حلقة تامة فإن $deg(a_n \Delta b_n) = deg(a_n) + deg(b_n)$

بالتالي $deg(a_n) + deg(b_n) = deg(0) = \infty$

بالتالي إما $deg(a_n) = \infty$ أو $deg(b_n) = \infty$

بالتالي إما $\boldsymbol{a_n = 0}$ أو $\boldsymbol{b_n = 0}$

بالتالي نجد أن $(\boldsymbol{S},*,\boldsymbol{\Delta})$ حلقة تامة.

انتهى حل الدورة...

إعداد : احمد ابو التوت ، شهد الحايك البوشي