◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : الثالثة عشر

◄ عنوان المحاضرة: خواص التكامل العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ خواص التكامل العقدي و أمثلة عليها

٢ـ نتائج و ملاحظات

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \bar{z}\,dz$ حيث Γ هو نصف دائرة الواحدة العلوي من 1 إلى -1 .

الحل :

بدايةً إن ممثل المنحني Γ هو التابع $\gamma(t)=e^{it} :\ 0\le t\le \pi$ حيث أنه من الواضح أنّ $\gamma(0)=1\,,\gamma(\pi)=-1$:

$$\int_\Gamma \bar{z}\,dz=\int_0^\pi \overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)dt=\int_0^\pi ie^{-it}e^{it}dt=\int_0^\pi idt=[it]_0^\pi=i(\pi-0)=\pi i$$

خواص التكامل العقدي:

$$1)\ \int_\Gamma f+g=\int_\Gamma f+\int_\Gamma g$$

$$2)\ \int_\Gamma \alpha f=\alpha\int_\Gamma f$$

$$3)\ \int_{\Gamma^-} f=-\int_\Gamma f$$

حيث أن Γ^- هو نفس المنحني Γ و لكن ممسوح من النهاية إلى البداية .

مثال :

$$\int_{c^-(o,1)} \frac{1}{z}dz$$

لو أخذنا $\Gamma = c^+(o,1)$ عندئذٍ $\Gamma^- = c^-(o,1)$ و بالتالي :

$$\int_{c^-(o,1)} \frac{1}{z}dz = -\int_{c^+(o,1)} \frac{1}{z}dz = -2\pi i$$

(التكامل الأخير تم حله بالمحاضرة السابقة بشكل مفصل)

- و لنكمل في خواص التكامل العقدي :

$$4)\ \int_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$$

مثال : احسب التكامل $\int_{\Gamma_i} f(z)dz$ حيث $f(z) = (y-x)^2 + i3x^2$ و حيث :

$$\Gamma_1 = [OA] \quad ,\Gamma_2 = [OB] \quad ,\Gamma_3 = OAB(\text{مثلث})$$

و أنّ $A = i \quad ,B = 1+2i$

الحل :

إن التابع المعطى مستمر على $\mathbb{C}$ هو تابع كثير حدود بمتحولين ، و القطع المستقيمة جميعها منحنيات ملساء و بالتالي فهو كمول على هذه القطع :

(اذا كان لدينا قطعة مستقيمة AB وكان لدينا Z_a العدد العقدي المقابل للنقطة A وكان لدينا Z_b العدد العقدي المقابل للنقطة B فإن التمثيل الوسيطي لها يكون $0 \le t \le 1 \quad (1-t)Z_a + tZ_b$)

من أجل المنحنى الأول :

$$\Gamma_1 : \gamma_1(t) = it \quad : 0 \le t \le 1$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 \underbrace{\left((t-0)+i0\right)}_{f(\gamma_1(t))} \underbrace{i}_{\gamma_1'(t)} \ dt = i\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{i}{2}$$

و بخصوص المنحنى الثاني:

$$\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (1-t)0 + t(1+2i) = (1+2i)t \quad : 0 \le t \le 1$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 \underbrace{\left((2t-t) + i(3t^2)\right)}_{f(\gamma_2(t))} \underbrace{(1+2i)}_{\gamma_2'(t)}\,dt$$

$$= (1+2i)\left[\frac{t^2}{2} + it^3\right]_0^1 = (1+2i)\left(\frac{1}{2} + i\right) = -\frac{3}{2} + 2i$$

وأخيراً بخصوص المنحنى الثالث (المثلث) : (وهو عبارة عن ثلاث قطع مستقيمة ولذلك سيتم تجزئته)

$$\Gamma_3 = [OA] \oplus [AB] \oplus [BO]$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} f(z)dz = \int_{[OA]} f\,(z)dz + \int_{[AB]} f(z)dz + \int_{[Bo]} f(z)dz$$

ولنحسب تكامل الحد الثاني

$$\Gamma' : \gamma(t) = (1-t)i + t(1+2i) = t + i(1+t) \quad : 0 \le t \le 1$$

$$\int_{\Gamma'} f(z)\,dz = \int_0^1 \underbrace{\left((1+t-t) + i(3t^2)\right)}_{f(\gamma(t))} \underbrace{(1+i)}_{\gamma'(t)}\,dt = (1+i)\int_0^1 1 + i3t^2 \quad dt$$

$$= (1+i)[t + it^3]_0^1 = (1+i)(1+i) = 2i$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} f(z)dz = \frac{i}{2} + 2i - \left(-\frac{3}{2} + 2i\right)$$

ملاحظة: نلاحظ في هذا التمرين أن قيمة التكامل على $[OB]$ مختلفة عن قيمته على $[OA] \oplus [AB]$ و بالتالي نستنتج أن التكامل غير مستقل عن الطريق الممسوح بالحالة العامة .

- لنكمل في الخواص :

٥- إذا كان f محدوداً على طريق Γ أي أنه يوجد $M > 0$ بحيث $|f(z)| \le M$ فإنّ:

$$\left|\int_\Gamma f\right| \le ML(\Gamma)$$

أي أنه إذا كان التابع محدود على طريق ما فإن طويلة تكامله على ذلك الطريق أصغر أو تساوي العنصر الراجح له مضروب بطول الطريق .

مثال: عين راجحاً لطويلة التكامل التالي :

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$$

تذكرة :

- المعادلة $|z-z_0| = r$ هي دائرة مركزها z_0 و نصف قطرها r
- إن طويلة e^z هي $e^{Re(z)}$

الحل :

$$|e^z| = e^{Re(z)} = e^x \leq e^2$$

حيث أن e^x تابع متزايد ، من جهة أخرى نعلم أن :

$$|a \pm b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

$$\Rightarrow |z^2+1|_{|z|=2} \geq \big||z^2| - |1|\big|$$
$$\Rightarrow |z^2+1|_{|z|=2} \geq |z^2-1| \geq |2^2-1| = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|_{|z|=2}} \leq \frac{1}{3}$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| \leq \frac{e^2}{3} = M \quad , \forall z : |z| = 2$$

و عليه يكون و حسب النتيجة السابقة :

$$\left|\int_\Gamma f\right| \leq ML(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \left|\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}dz\right| \le \frac{e^2}{3}(2\pi r) = \frac{4}{3}e^e\pi$$

تمرين احسب التكامل :

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}dz$$

حيث أن Γ هو مربع رؤوسه $A = 1+i\,, B = -1+i\,, C = -1-i\,, D = 1-i$

(سيحل فيما بعد – الجواب $2\pi i$)

مبرهنة : إذا كان f مستمراً على منطقة G و كان Γ طريقاً في G و كان ل f أصلياً F على G :

فإن :

$$\int_\Gamma f = F(z_r) - F(z_I)$$

حيث z_I بداية الطريق و z_r نهايته .

ملاحظة : إذا تحققت شروط المبرهنة السابقة فإن التكامل سيكون مستقل عن الطريق المسلوك بين نقطتين في G و يرتبط فقط بنقطتي البداية والنهاية .

مثال :

$$\int_\Gamma zdz$$

إن $f(z) = z$ تابع مستمر على أي طريقٍ Γ من المستوي العقدي و تابعه الأصلي هو $\frac{1}{2}z^2$ و بالتالي :

$$\int_\Gamma zdz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z_r}^{z_I} = \frac{1}{2}(z_I^2 - z_r^2)$$

ملاحظة : إن استمرار تابع عقدي على منطقة غير كافٍ لوجود تابع أصلي له على تلك المنطقة .

نتيجة: إذا تحققت شروط المبرهنة السابقة على منطقة G فإن التكامل للتابع f على طريق مغلق في G سيكون معدوماً .

- **مثال معاكس يبين أن الاستمرار لتابع عقدي غير كافٍ لوجود تابع أصلي له على تلك المنطقة**

لنأخذ التابع العقدي $f(z) = \frac{1}{z}$ و الذي هو مستمر على المجموعة $\mathbb{C}^*$ إلا أنه لا يملك تابعاً أصلياً عليها ذلك لانه لو فرضنا جدلاً وجود تابع أصلي له على تلك المنطقة لوجب أن يكون التكامل $\int_{C^+_{(0,1)}} \frac{1}{z} dz$ معدوماً لأن الطريق $C^+(0,1)$ مغلق في $\mathbb{C}^*$ لكننا سابقاً وجدنا أن قيمة هذا التكامل $2\pi i$ و هذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ ، وبالتالي هو لا يملك تابعاً أصلياً على $\mathbb{C}^*$.

- **هل يكفي أن يكون التابع تحليلي على منطقة لوجود تابع أصلي على هذه المنطقة ؟**

في الحقيقة إن هذا غير كافٍ ، و المثال المعاكس لذلك هو التابع نفسه $f(z) = \frac{1}{z}$ التحليلي على $\mathbb{C}^*$ وليس له تابعاً أصلياً على $\mathbb{C}^*$ كما وجدنا قبل قليل .

<u>((في حال ورود هذا السؤال في الفحص فإننا نعيد خطوات التمرين السابق بالتفصيل و فقط نستبد الاستمرارية بالتحليلية))</u>

<u>مثال</u> : احسب تكامل $\frac{1}{z}$ على أي منحنٍ مغلق لا يحوي بداخله المبدأ .

لو أخذنا التابع اللوغارتمي سنلاحظ أنه لا يمكن الانطلاق من نقطة ما من المنطقة المطلوبة والعودة لها بالدورات دورة كاملة حول المبدأ و هذا يعني أنه سيوجد فرع تحليلي لتابع اللوغارتم على تلك المنطقة فنقبله تابعاً أصلياً لـ $\frac{1}{z}$ على تلك المنطقة و لما كانت المنطقة مغلقة، فإن هذا التكامل يكون معدوماً .

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – احمد أبو التوت – نذير تيناوي