نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الانتقال الافتراضي

بسم الله وبالله المستعان . . لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي سنتناول لها الانتقال الافتراضي وأمثلة وتمارين.

الانتقال الافتراضي

لنعطي باللحظة الزمنية t للنقطة المادية M انتقالاً عنصرياً (يحدث دون تغير في الزمن)
نرمز له بـ (δr) تمييزاً عن الانتقال الحقيقي (dr)
على أن يحدث هذا انتقالاً عنصرياً (δr) بثبات الزمن ، ونسمي الانتقال δ_r الذي مركباته $(\delta_x , \delta_y , \delta_z)$ انتقالاً افتراضياً و لنبحث عن العلاقة التي تحققها الانتقالات الافتراضية
عندما يكون الارتباط هندسياً $f(x,y,z,t) = 0 \ldots . (1)$ وهي معادلة تمثل سطح هندسي في الفراغ.
وعندما نعطي النقطة M انتقالاً (δr) فإن احداثياتها $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ و هذا الانتقال يحافظ على الارتباط الهندسي الذي يحقق العلاقة $f(x,y,z,t) = 0$
وبالتالي $f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = 0 \ldots . . (2)$
ومنه $f(x,y,z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta_z = 0$ حيث $((\delta t = 0))$ لأن الزمن ثابت))
هذا المقدار هو عبارة عن تدرج التابع $grad\, f \delta_r = 0 \ldots (3)$ أي أن δ_r متعامد مع الناظم على السطح ، هذه عبارة عن الانتقال الافتراضي للنقطة المادية على السطح وبالتالي عندما يكون الارتباط محرراً بحيث تنفك النقطة المادية عن السطح (لا يوجد ارتباط) وتكون النقطة طليقة ونتيجة لهذا الانتقال فإن العلاقة (2) تكون غير محققة .

العمل الافتراضي يعرف العمل الافتراضي للنقطة المادية M على الشكل التالي :

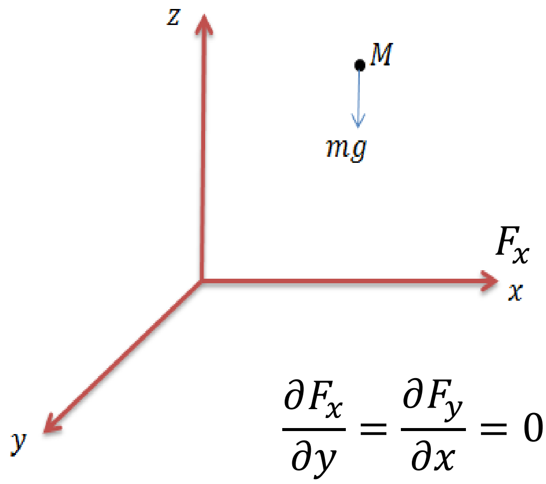
$$\delta A = F.\delta_r = F_x.\delta_x + F_y.\delta_y + F_z.\delta_z$$

الارتباط المثالي هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لرّد الفعل معدوم (يساوي الصفر) وبالتالي إذا كان لدينا نقطة مادية ملازمة لسطح أملس (ناعم) فإن رد الفعل يكون عامودياً ويكون الانتقال معدوماً على السطح
وبالتالي يصبح لدينا عمل رد الفعل $R.dr = 0$ وبالتالي يكون العمل يساوي الصفر$(\delta A = 0)$
ملاحظة : السطح الأملس يكون رد الفعل ناظمياً على السطح وبتالي يكون معدوم.
وبالتالي إذا وجد احتكاك مع هذا السطح ((غير أملس)) يكون لرّد الفعل مركبة مماسية عملها غير معدوم ((لا يساوي الصفر)) وهكذا نقول أن السطح الأملس ((ناعم – مثقول)) يمثل ارتباطاً مثالياً .

مثال (1)

بين أن قوة الثقالة كمونية ، وأوجد تابع الكمون لها.

الحل



من المعلوم أن في منطقة معينة بالقرب من سطح الأرض (صغيرة بالنسبة للكرة الأرضية)
يمكن اعتبار قوة الثقالة هي $p = mg$ ثابتة بالشدة والاتجاه
وبالتالي إذا أخذنا جملة المحاور الاحداثية فيها oz شاقولي صاعد
وبالتالي فإن مساقط قوة الثقالة

$$F_x = 0 \ , \ \ F_y = 0 \ \ , F_z = -mg$$

من أجل الاثبات أن القوة كمونية يجب تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

الشروط محققة .

ومنه :

$$u = \int F \, . dr \Rightarrow u = -\int mg \, . dz$$

$$\boxed{u = -mgz}$$

و هو تابع الكمون(القوة الثقالية)

مثال (2)

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على منحني أفقي ومجذوبة من قطب ثابت بقوة متناسبة مع بعد النقطة عن القطب $\vec{F} = -2m\vec{r}$ ، ما هي القوة المؤثرة على هذه النقطة ؟ وهل هي كمونية ؟ وأوجد تابع الكمون لها .

الحل

القوة المؤثرة : هي قوة الثقالة $p = mg$ والقوة الجاذبة $\vec{F} = -2m\vec{r}$
ويمكن أن تكتب بالشكل $\vec{F} = -2m(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$
قوة الثقالة وجدنا أنها كمونية من المثال (1) ، وبالأسقاط القوة $\vec{F}$ نجد :

$$F_x = -2mx \quad , \quad F_y = -2my \quad , \quad F_z = 0$$

لكي تكون القوة كمونية يجب ان تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}=0$$

$$u=u_1+u_2$$

ملاحظة : نلاحظ على أن تابع الكمون للقوة ما هو إلا عبارة عن عملها الموافق لانتقال محدد وبالتالي بما أن قوة الثقالة شاقولية والانتقال افقي فإن عمل هذه القوة يكون معدوم وبالتالي تابع الكمون يكون يساوي الصفر $(u_1=0)$

$$u=-2m\int r\,.dr \Longrightarrow u=-\frac{2mr^2}{2}=-mr^2$$

$$\boxed{u=u_2=-mr^2}$$

مثال (3)

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على الحلزون للغاريتمي الافقي $r=e^{-\theta}$ مجذوبة من القطب o بقوة متناسبة مع بعد هذه النقطة عن القطب وقيمتها $\vec{F}=-2m\vec{r}$ تُركت النقطة المادية بدون سرعة ابتدائية من موضع M_0 حيث $\theta=0$ ، أوجد حركة النقطة المادية بالاعتماد على تكامل الطاقة ، ثم احسب الزمن اللازم حتى تصل النقطة للقطب .

الحل

القوة المؤثرة على النقطة المادية هي قوة الثقالة $p=mg$ والقوة $\vec{F}=-2m\vec{r}$

حسب ما وجد بالمثالين السابقين ((المثال (1) والمثال (2))) أن القوة الثقالة هي قوة كمونية والقوة F هي قوة كمونية $u=\int p\,.dr+\int F\,.dr$

حيث $\int p\,.dr=0$ اي معدومة لان القوة عامودية على الانتقال .

وحسب المثال السابق(2) وجدنا $u=-mr^2$

ونعلم أن قانون تكامل الطاقة يعطى بالعلاقة التالية : $T=u+h$

$$\frac{1}{2}mv^2=-mr^2+h\,\ldots.(*)$$

وحسب <u>الشروط الابتدائية</u> $(\theta=0,v=0)$ ومنه $r=1$ نجد : $h=m$

وبتعويض $h=m$ بالمعادلة $(*)$ نجد : $\frac{1}{2}mv^2=-mr^2+m$

$$\frac{1}{2}mv^2=m(1-r^2) \Longrightarrow v^2=2(1-r^2)\ldots(1)$$

$$\boxed{v^2=r'^2+r^2\theta'^2} \quad ; \quad r'=-e^{-\theta}.\theta'$$

" ورد معنا في محاضرة سابقة "
قانون تكامل الطاقة على الشكل التالي :
$T+V=h$
وذلك نتيجة افتراضنا $V=-u$
عبارة تكامل الطاقة هو :
$T=u+h$

سوف نورد استنتاج قانون السرعة بالإحداثيات القطبية في نهاية المحاضرة وهو
$v=\sqrt{r'^2+r^2\theta'^2}$

$$v^2 = e^{-2\theta}.\theta'^2 + e^{-2\theta}.\theta'^2 \Longrightarrow v^2 = 2e^{-2\theta}.\theta'^2 \Longrightarrow v^2 = 2r'^2 \dots (2)$$

بمساواة العلاقة (1) والعلاقة (2) نجد : $2r'^2 = 2(1 - r^2)$

$$\Longrightarrow r'^2 = (1 - r^2) \Longrightarrow r' = \sqrt{(1 - r^2)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى قابلة لفصل المتحولات :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{(1 - r^2)} \Longrightarrow \frac{dr}{\sqrt{(1 - r^2)}} = dt \Longrightarrow \boxed{t = arc\sin r}$$

ملاحظة : تعود النقطة المادية إلى القطب o في اللحظة $t = 0$ عندما يكون $r = 0$

ومنه معادلة الحركة تكون $\boxed{r = \sin t}$

وهي معادلة المسار الحلزوني $\boxed{v = \frac{a}{k}\theta}$ $\Longrightarrow$ $\frac{v}{\theta} = \frac{at}{kt} = \frac{a}{k}$

مثال (4) إضافي " دورة "

M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المسار $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ وتخضع لقوة من الشكل :
برهن أن القوة كمونية، وأوجد تكامل الطاقة للنقطة M مع العلم ان a, k ثوابت $\vec{F} = mk(y\vec{\imath} + xy\vec{\jmath})$

الحل

القوة المؤثرة : هي قوة الثقالة $p = mg$ والقوة الجاذبة $\vec{F} = mk(y\vec{\imath} + xy\vec{\jmath})$
قوة الثقالة وجدنا أنها كمونية من المثال (1)، أما بالنسبة للقوة $\vec{F}$ بالإسقاط نجد :

$$F_x = -mky \quad , \quad F_y = -mkxy \quad , \quad F_z = 0$$

لكي تكون القوة كمونية يجب ان تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

لكن نلاحظ هنا أن القوة غير كمونية لأن :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = mk \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = mxk \Longrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

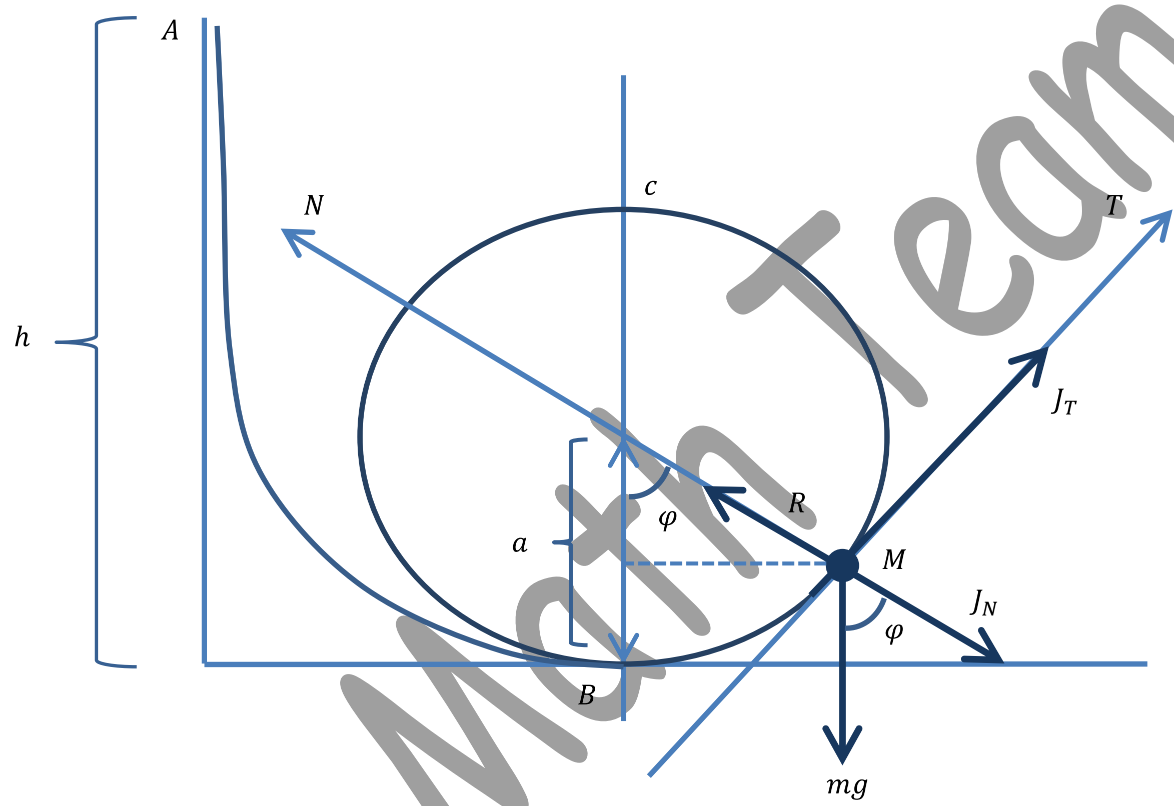
وبالتالي نتوقف عن الحل .

وظيفة

تسقط نقطة مادية ثقيلة M دون سرعة ابتدائية ودون احتكاك من النقطة A الواقعة على ارتفاع h على الطريق الذي ينتهي بدائرة نصف قطرها r **المطلوب:**

احسب ارتفاع النقطة M بحيث يمكن للنقطة M أن تجتاز كل الطريق دون أن تنفك عنه

الحل



يتعيّن وضع النقطة M على الطريق بوساطة الزاوية φ الواقعة بين الشاقول و $\overrightarrow{oM}$ وطبقاً لمبدأ دالامبير تكون محصلة القوى المؤثرة في النقطة المادية تساوي الصفر

لنفرق قوة العطالة $J = -m\Gamma$ إلى قسمين :

(1) $J_T = -m\Gamma_T = -m\dfrac{dv}{dt}$ يتجه بعكس جهة $\dfrac{dv}{dt}$ أي نحو الأعلى (لأن السرعة متناقصة)

(2) $J_N = -m\Gamma_N = -m\dfrac{v^2}{a}$ يتجه بعكس جهة التسارع الناظمي أي نحو الخارج

أما رد الفعل سيكون في جهة الحركة أي نحو داخل الدائرة وهكذا نجد :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{J_T} + \overrightarrow{J_N} = 0 \dots\dots (1)$$

نسقط على $\overrightarrow{oM}$ فنجد بسهولة :

$$P\cos\varphi + m\frac{v^2}{a} - R = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{R = P\cos\varphi + m\frac{v^2}{a} = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{a}} \dots\dots (2)$$

وهذه المعادلة تحوي السرعة ومن الضروري حسابها من قانون تغير الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 = mg[h - (a - acos\varphi)]$$

حيث المقدار $a - acos\varphi$ أتى من معادلة المسار ومنه :

$$m\frac{v^2}{a} = \frac{2mg}{a}[h - a + acos\varphi] \dots\dots (3)$$

بالتعويض في (2):

$$R = P\left(2\frac{h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right) \dots\dots (4)$$

ولكي لا تنفك النقطة يجب أن يبقى المقدار R أكبر أو يساوي الصفر أي أن:

$$2\frac{h}{a} - 2 + 3\cos\varphi \geq 0$$

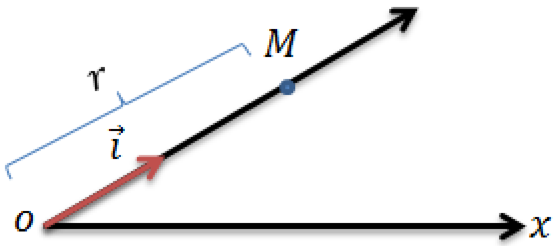
فإذا علمنا أن احتمال انفكاك النقطة يكون أعظمياً عندما تكون سرعتها أصغرية فإن الانفكاك قد يحدث في أعلى نقطة من الطريق الدائري عند $\varphi = \pi$

" استنتاج قانون السرعة بالإحداثيات القطبية "

ليكن $M(r,\theta)$ نقطة معينة بالإحداثيات القطبية و $\vec{i}$ شعاع الواحدة على المحور القطبي r

الحل

نلاحظ أن $\overrightarrow{oM} = r.\vec{i}$



نشتق بالنسبة لـ (t) فنجد :

(المشتق الجداء) $$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{i} + r.\frac{d\vec{i}}{dt}$$

$$\vec{v} = r'.\vec{i} + r.\theta'\vec{j} \qquad ;(\vec{i}' = \theta'\vec{j})$$

نأخذ الطويلة : $$|v| = \sqrt{(r')^2 + (r.\theta')^2} \Rightarrow |v| = \sqrt{r'^2 + r^2.\theta'^2}$$

نربع الطرفين فنجد : $v = r' \;, v_\theta = r.\theta'$; $\boxed{v^2 = r'^2 + r^2.\theta'^2}$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** راما جوهر ** عبير خزنة كاتبي