نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: قابلية الاشتقاق للدوال المركبة

سنتعرف في هذه المحاضرة على :

١ـ قابلية الاشتقاق للدوال المركبة.

٢ـ تمارين شاملة لما مر ذكره سابقا

قابلية الاشتقاق للدوال المركبة: لتكن u, v دوال حقيقية معرفة كما يلي :

$$u: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad v: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto u(x,y) \quad , \quad (x,y) \mapsto v(x,y)$$

الدالة المتجهية يكون مستقرها $\mathbb{R}^n$ ، $n > 1$ أي أن الصور تكون عبارة عن مرتبات مكونة من n مسقطاً

ولتكن F دالة متجهية بحيث:

$$F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto F(x,y) = \left(\underbrace{u(x,y)}_{\text{دالة حقيقية}}, \underbrace{v(x,y)}_{\text{دالة حقيقية}} \right)$$

نقول عن الدالة F أنها قابلة للاشتقاق إذا كانت كل مركبة من مركباتها قابلة للاشتقاق في النقطة c.

أي: إذا كانت الدالتان الحقيقيتان $u(x,y), v(x,y)$ قابلتان للاشتقاق في النقطة c .

- إذا كانت لدينا الدالتين:

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \underbrace{\overset{F}{\to}}_{\text{قابلة للاشتقاق}} D' = F(D) \subseteq \mathbb{R}^2 \underbrace{\overset{f}{\to}}_{\text{قابلة للاشتقاق}} \mathbb{R}$$

و لنعرف الدالة g بالشكل :

$$g = foF: \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}$$

حيث g قابلة للاشتقاق لأن f, F قابلتان للاشتقاق، عندها:

$$g(x,y) = (foF)(x,y)$$
$$= f\big(F(x,y)\big) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

مشتق الدالة g يعطى ب :

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: لتكن f دالة حقيقة معرفة كما يلي :

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{yoy'\}\to\ \mathbb{R}$$
$$f(x,y)=arc\ tan\frac{y}{x}$$

حيث:

$$x,y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$t\to x(t)=cos(t)\ ,y(t)=sin(t)$$

أوجد بطريقتين مختلفتين المشتق:

$$\frac{df}{dt}(t)$$

الحل

طريقة أولى: نعوض كل من x و y بما يساويها في f :

$$F(t)=arctan\frac{y}{x}=arctan\frac{sin\,t}{cos\,t}=arctan\,tan\,t=t$$

ومنه أصبح لدينا f بدلالة وسيط واحد (t) أي:

$$F(t)=t\Rightarrow F\big(x(t),y(t)\big)=\frac{df}{dt}(t)=1$$

وهو المطلوب...😜

الطريقة الثانية:

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-sin\,t)\ +\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}cos\,t$$

مشتق $arc\ tan\,u$ هو $\frac{(u)'}{1+u^2}$

$$= \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}(-\sin t) + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}(\cos t)$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\sin t + \frac{x}{x^2+y^2}\cos t$$

نعوض كل y بـ $\sin t$ وكل x بـ $\cos t$ ونحن نعلم أن $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ومنه:

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = \frac{\sin t}{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}}\sin t + \frac{\cos t}{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}}\cos t$$
$$= \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

وانتهينا...😍

و الآن سنبدأ بحل تمارين مختلفة ستساعدنا على فهم الأفكار التي درسناها إلى الآن :

التمرين الأول: لتكن لدينا الدالة:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^6+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أثبت أنه يوجد للدالة f مشتق في $(0,0)$ أي في اتجاه $u(\alpha,\beta)$ بحيث $\alpha^2+\beta^2=1$ و β.
وبين أن f غير مستمرة في $(0,0)$.

الحل

إن: $\| u \| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

والآن لنوجد المشتق الاتجاهي و ذلك من الدستور :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

فإذا كانت النهاية السابقة موجودة نقول عندها أن للدالة f مشتق جزئي في النقطة c باتجاه u.
لنحسب المقادير التي سنحتاجها في التعريف السابق:
١- لنحسب $c+hu$:

$$c + hu = (0,0) + h(\alpha,\beta) = (h\alpha, h\beta)$$

٢- سنقوم بحساب $f(c+hu)$:

$$f(c+hu) = \frac{h^3\alpha^2\beta}{h^6\alpha^6 + 2h^2\beta^2} = \frac{h^3\alpha^2\beta}{h^2[h^4\alpha^6 + 2\beta^2]} = \frac{h\,\alpha^2\beta}{h^4\alpha^6 + 2\beta^2}$$

والآن نعوض بدستور المشتق الاتجاهي فيكون:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+hu) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\,\alpha^2\beta}{h^4\alpha^6 + 2\beta^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha^2\beta}{h^4\alpha^6 + 2\beta} = \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

فالنهاية موجودة دوماً حيث $\beta \neq 0$.

<u>الآن:</u> لنثبت أن الدالة f غير مستمرة عند $(0,0)$:

الطريقة الأولى:

$y = x^2$ (لأن قوة x هب الأكبر) ، $(0,0)$ نقطة حدية.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^6 + 2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2} \neq (f(0,0) = 0)$$

أي f غير مستمرة.

الطريقة الثانية:

نقوم بإيجاد متتالية متقاربة من $(0,0)$و لكن صورتها لا تسعى لصورة النقطة (0،0) أي لنأخذ المتتالية:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^6} + 2\frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}\left[\frac{1}{n^2} + 2\right]} = \frac{1}{\frac{1}{n^2} + 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

بالتالي الدالة غير مستمرة عند (0،0).

الطريقة الثالثة:

حسب تعريف الاستمرار:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \| (x,y) - (0,0) \| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

لنأخذ نقطة (x,y) بدلالة ال δ لأنها جوار:

$$x = \frac{\delta}{2} \ , \qquad y = \frac{\delta^2}{4}$$

$$\| (x,y) \|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^4}{16}$$

$$= \frac{\delta^2}{4}\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) < \delta^2$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) < 1$$

$$1 + \frac{\delta^2}{4} < 4 \ldots (*)$$

$$\frac{\delta^2}{4} < 3 \Rightarrow \delta^2 < 12 \Rightarrow \delta < 2\sqrt{3}$$

إن $\| (x,y) \|$ ضمن شرط وهو $0 < \delta < 2\sqrt{3}$.

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{\left(\left(\frac{\delta^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{\delta^2}{4}\right)\right)}{\left(\frac{\delta^6}{64}\right) + \left(\frac{2\delta^4}{16}\right)} \right| = \frac{1}{\frac{\delta^2}{4} + 2}$$

إن:

$$\frac{\delta^2}{4} + 2 = \underbrace{\frac{\delta^2}{4} + 1 + 1 < 4 + 1}_{*\text{حسب}} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\delta^2}{4} + 2} > \frac{1}{5}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{5} > 0 \,, \forall \delta > 0 \,; 0 < \delta < 2\sqrt{3} : \| (x,y) - (0,0) \| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| > \frac{1}{5}$$

ومنه f غير مستمرة عند $(0,0)$ ...☹

التمرين الثاني: لتكن لدينا الدالة:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = ||x||^{2-n}$$

أثبت أن $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 i} = 0$ ((مجموع المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية تساوي الصفر)).

الحل

إن الدالة عبارة عن نظيم:

$$||x||^{2-n} = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)^{2-n} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}$$

نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية:

- نقوم بإيجاد المشتق الجزئي من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(1 - \frac{n}{2}\right)(2x_1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

- نقوم بإيجاد المشتق الجزئي من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x_1 : (وهو مشتق جداء)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\begin{bmatrix} (2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}} \\ +(2x_1)(2x_1)\left(-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2\left(1 - \frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}[1 - nx_1^2.(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}]$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2\left(1 - \frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}[1 - nx_2^2.(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}]$$

وهكذا بالمتابعة إلى أن نصل إلى $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 2\left(1 - \frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}[1 - nx_n^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}]$$

بالجمع نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2\left(1 - \frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

$$.\left[n - n\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}}_{=1}\right.$$

$$= 2\left(1 - \frac{n}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}[n - n] = 0$$

وهو المطلوب...☺

التمرين الثالث: لتكن لدينا الدالة المعرفة بالشكل:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0\,; & x = 0, y = 0 \\ x^2 \arctan\frac{y}{x} - y^2 \arctan\frac{x}{y}\,; & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

الدالة معرفة بالشكل: $|\arctan u| < \frac{\pi}{2}$

أوجد:

$$f_{xy}(0,0)\,, f_{yx}(0,0)\,, f_x(0,0)\,, f_y(0,0)$$

الحل

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2(\arctan 0 - 0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2(\arctan 0 - 0)}{h} = 0$$

والآن لنوجد $f_x(0,0)$:

$$f_x(x,y) = 2x\arctan\frac{y}{x} + x^2.\frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - y^2.\frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

$$= 2x\arctan\frac{y}{x} - \underbrace{\frac{yx^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^3}{x^2 + y^2}}_{\text{نخرج } y- \text{عامل مشترك}}$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = 2x\arctan\frac{y}{x} - y\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right] = 2x\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = \begin{cases} 0\,; x = 0\,, y = 0 \\ 2x\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y\,; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}f_x = (f_x)_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - h}{h} = -1$$

أما الآن ف تبقى علينا إيجاد $f_y(0,0)$:

$$f_y(x,y) = x^2 . \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 2y \arctan \frac{x}{y} - y^2 . \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

$$= \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 2y \arctan \frac{x}{y} = x \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) - 2y \arctan \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = x - 2y \arctan \frac{x}{y}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 0 \; ; x = 0 \,, y = 0 \\ x - 2y \arctan \frac{x}{y} \; ; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

ومنه يكون:

$$f_y(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x (0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

وبهذا يتم المطلوب...☺

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_رهف النقشي_سارة شهاب