نظري

◄ دكتورة المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: الثالثة عشر ،عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة

المحتوى العلمي :

١ـ المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى الغير المتجانسة.
٢ـ معادلة لاغرانج المتجانسة.
٣ـ امثلة.

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى الغير متجانسة:

نقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية انها من المرتبة الأولى وذلك إذا كانت المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات من المرتبة الأولى أي من الشكل:

$$P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z)$$

حيث أن $z=(x,y)$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ وهي معادلة لاغرانج الغير متجانسة ونسمي المساواة التالية:

$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ **بالجملة الملحقة أو المساعدة.**

مبرهنة: (دون برهان)

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية الغير متجانسة

$$P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z)$$

يعطى بالشكل $F(u,v)=0$ حيث أن كل من :

$$u=u(x,y,z)=C_1 \ \&\& \ v=v(x,y,z)=C_2$$

إذا الحل يكون $F(C_1,C_2)=0$, $F(u,v)=0$ بحيث:

u,v هما تكاملان أوليان للجملة المساعدة وسنرى ذلك في المثال الآتي.

مثال:

أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية أو أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xp + yq = z$$

حيث : $P(x,y,z) = x \;\&\; Q(x,y,z) = y \;\&R(x,y,z) = z$

الحل:

هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى يعطى الحل العام لها بالعلاقة : $F(u,v) = 0$

حيث : $v = C_2 \quad u = C_1$ تكاملان اوليان للجملة الملحقة والجملة المساعدة هي $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$

١ ٢ ٣

من (١) و(٢) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ بالمكاملة نحصل على:

$$ln(x) = ln(y) + ln(C_1) \to ln(x) = ln(yC_1) \to x = C_1 y \to C_1 = \frac{x}{y}$$

$$u = C_1 \to u = \frac{x}{y}$$

من (٢) و(٣) $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ بمكاملة الطرفين نحصل على :

$$ln(y) = ln(z) + ln(C_2) \to y = C_2 z \to C_2 = \frac{y}{z}$$

$$v = C_2 \to v = \frac{y}{z} \xRightarrow{\text{ومنه الحل هو}} F(u,v) = 0 \to F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

وهو السطح التكاملي $F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$ للمعادلة التفاضلية الجزئية.

السطح التكاملي لمعادلة تفاضلية جزئية مار بمنحني معلوم :

١- اذا كان $v = C_2 \quad u = C_1$ حل عام للجملة الملحقة فان الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى $F = (u,v)$ والمطلوب تعيين السطح التكاملي الذي يمر بالمنحني المفروض Γ .

٢- **لتكن المعادلات الوسيطية ل Γ هي :** $x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$ وبما ان السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة الملحقة عندها يكون السطح محققا $v\big(x(t), y(t), z(t)\big) = C_2 \quad , \quad u\big(x(t), y(t), z(t)\big) = C_1$

وبحذف t من المعادلتين نحصل على الدالة F التي تربط بين C_1 , C_2 أي ان $F(C_1, C_2)$ الموافقة للسطح التكاملي المطلوب.

تمرين :

اوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى $(2x - y - z)p + (2y - z - x)q = 2z - x - y$ والمار بالمستقيم $y = c \ , \ x = 0$

الحل:

معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى حلها هو $F(u, v) = 0$ حيث $u = C_1 \ , \ v = C_2$ وهما تكاملان اوليان للجملة الملحقة

$$\underbrace{\frac{dx}{2x-y-z}}_{1} = \underbrace{\frac{dy}{2y-z-x}}_{2} = \underbrace{\frac{dz}{2z-x-y}}_{3}$$

التكامل الأول:

$$1 + 2 + 3 \Rightarrow \frac{dx + dy + dz}{2x + 2y + 2z - 2x - 2y - 2z} = \frac{dx + dy + dz}{0}$$

$$dx + dy + dz = 0 \xRightarrow[\text{نكامل}]{} x + y + z = C_1 \xRightarrow[\text{نعوض قيمة } C_1]{} u = x + y + z$$

التكامل الثانـي:

$$\frac{dx - dy}{2x - y - z - 2y + z + x} = \frac{dy - dz}{2y - z - x - 2z + x + y} \Rightarrow \frac{dx - dy}{3x - 3y} = \frac{dy - dz}{3y - 3z}$$

$$\frac{d(x - y)}{3(x - y)} = \frac{d(y - z)}{3(y - z)} \Rightarrow \frac{d(x - y)}{(x - y)} = \frac{d(y - z)}{(y - z)} \xRightarrow[\text{نكامل}]{}$$

$$ln(x - y) = ln(y - z) + ln\, C_2$$

$$x - y = (y - z)C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{x - y}{y - z} \Rightarrow v = \frac{x - y}{y - z}$$

ومنه السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية $F\left(x + y + z \, , \frac{x-y}{y-z}\right)$ والسطح التكاملي المار ب Γ هو:

$$x=0\quad,\quad y=c\quad,\quad C_1=x+y+z\quad,\quad C_2=\frac{x-y}{y-z}$$

1 2 3 4

نعوض ١ و ٢ في ٣و٤

$$C_1=c+z\quad,\quad C_2=\frac{-c}{c-z}\quad\Rightarrow z=C_1-c\xrightarrow[\text{نعوض قيمة } z]{}C_2=\frac{-c}{c-C_1+c}=\frac{-c}{2c-C_1}$$

و هو السطح التكاملي المار بالمنحني F نعوض ٣ و ٤ في العلاقة C_2 : $C_2=\frac{x-y}{y-z}=\frac{-c}{2c-x-x-z}$

نعوض c من ٢ فنجد : $\frac{x-y}{y-z}=\frac{-y}{2y-x-y-z}=\frac{-y}{y-x-z}$

$$\boxed{\Rightarrow\frac{x-y}{y-z}=\frac{y}{x+z-y}}$$

و هو السطح التكاملي المار بالمنحني.

معادلة لاغرانج المتجانسة:

معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى متجانسة أي بدون طرف ثاني $R(x,y,z)=0$

فتكون من الشكل $P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=0$ وكذلك تكون الجملة الملحقة:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{0}$$

قد يسأل البعض هل من الممكن أن نضع صفراً في المقام؟؟؟!!!

أصدقائي هذا لا يعبر عن كسر عادي بل يعبر عن نسبة ^_^(أي هذه العملية ممكنة)

ومن النسبة الثانية والثالثة جداء الطرفين بالوسيطين نجد:

$$dz=0\to C_0z=C_1\to u=z$$

وكذلك v نحصل عليها من النسبة (١) و(٢) ومنه $F(u,v)=0\to F(z,v)=0$

تمرين :

اوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية $yp-xq=0$ وما هو السطح التكاملي المار

بالمنحني المعين بالمعادلتين $y = 0 \quad , \quad x^2 - z^2 = 1$

الحل :

نلاحظ انها معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى حلها من الشكل : $F(u,v) = 0$

بما انها متجانسة فيكون $F(z,v) = 0$ وبالتالي : $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0} = 0$ حيث ان

$\Rightarrow u = C_1 = z$ ، $z = C_1$ ، $u = z$ ومنه يكون : $xdx + ydy = 0$

بالمكاملة $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_2 \Rightarrow x^2 + y^2 = C_2 \Rightarrow F(z, x^2 + y^2) = 0$

والسطح التكاملي المار بالمنحني Γ هو

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - z_2 = 1 \quad , \quad C_1 = z \quad , \quad C_2 = x^2 + y^2$$

1 2 3 4

نعوض ١ في٤ و ٣ في ٢ فيكون : $x^2 = C_1^2 + 1$, $x^2 - C_1^2 = 1$, $x^2 = C_2$

ومنه $C_2 = C_1^2 + 1 \ldots. (5)$ نعوض٣ و ٤ في ٥ فنجد:

وهو السطح التكاملي المار بالمنحني Γ : $x^2 + y^2 = z^2 + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1$

تمرين:

اوجد السطوح التكاملية للمعادلة

$$x^2.p + y^2.q = (x+y)\,z$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\frac{dx}{\underbrace{x^2}_{(1)}} = \frac{dy}{\underbrace{y^2}_{(2)}} = \frac{d}{\underbrace{(x+y)\,z}_{(3)}}$$

بأخذ $(2) = (1)$ نجد: $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$

بمكاملة الطرفين يكون: $\Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1$

و هو التكامل الأوّلي الأوّل. $\Rightarrow c_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = u$

والآن بأخذ $(3) = (2) - (1)$ نجد:

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x + y)\, z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{dz}{(x + y)\, z} \Rightarrow \frac{d(x - y)}{(x - y)} = \frac{dz}{z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$ln(x - y) = ln\, z + ln\, c_2$$

$$\Rightarrow ln(x - y) - ln\, z = ln\, c_2 \Rightarrow ln\left(\frac{x - y}{z}\right) = ln\, c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{x - y}{z} = v$$

و هو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(c_1\,, c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\,, \frac{x - y}{z}\right) = 0$$

"تنويه" لقد قامت الدكتورة باعطاء تمارين وظيفة سوف نقوم بإدراجهم بالمحاضرة القادمة ان شاء الله..

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نص الله*علا الدالاتي*دعاء الرحيل