◄ دكتور المادة: برلنت مطيط

◄ المحاضرة: الثامنة والتاسعة

◄ عنوان المحاضرة التقريبات باستخدام المربعات الصغرى

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

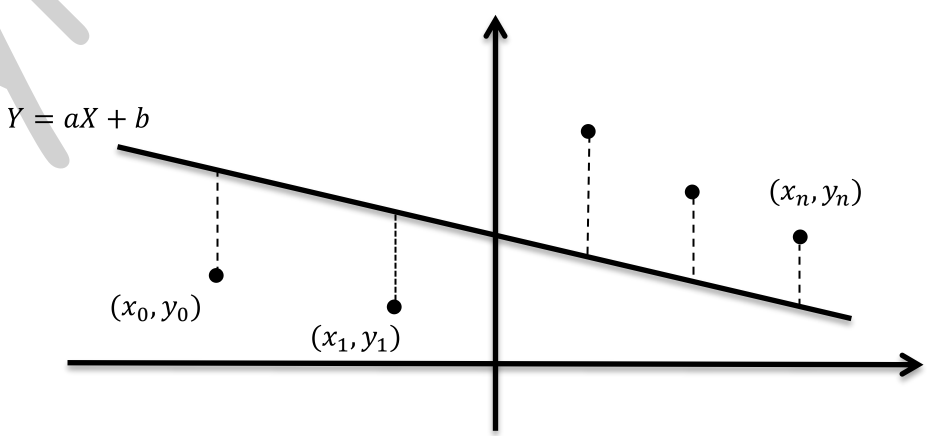
انهينا في المحاضرة السابقة بحث الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية، وفي هذه المحاضرة سنأخذ بحث التقريبات باستخدام المربعات الصغرى.

هو بحث سهل لا يوجد به الكثير من الأفكار . سنأخذ في هذه المحاضرة لمحة نظرية عن المقرر ثم في المحاضرتين القادمتين سنتعرف أكثر عن هذا الموضوع.

التقريبات باستخدام المربعات الصغرى

تعرفنا أثناء دراستنا لمقرر التحليل العددي (1) على بحث الاستيفاء، حيث أن الاستيفاء هو بحث عن التابع(قد يكون حدودية)، بحيث يمر من جميع النقاط المعطاة، أذا كان لدينا مثلا خمس نقاط فالحدودية الواجب إيجادها ستكون من الدرجة الرابعة، وهكذا نجد أن أذا كان لدينا n نقطة معطاة فالحدودية المطلوبة ستكون من الدرجة $(n-1)$.

وهنا نعلم أن أمكانية الاستيفاء موجودة، ولكن نسبة الخطأ المرتكب كبيرة جداً، لذلك يستخدم طريقة ثانية وهي طريقة التقريبات وتعتمد على اختيار التابع الذي قد يكون حدودية أو تابع أسي أو لوغاريتمي، بحيث قد يمر من النقاط المعطاة وقد لا يمر من النقاط الأخرى ولكن الشرط هو أن يكون الخطأ الكلي (حيث الخطأ الكلي هو مجموعة الأخطاء لكل النقاط والخطأ هو بعد النقطة عن التابع) أصغر ما يمكن . الشكل التالي يبين بيانات معطاة وتقريبها لمستقيم:



وهكذا نجد انه في التقريبات نختار التابع (من زمرة محددة أي من أحد انواع التوابع(حدوديات، أسي، لوغاريتم)) ثم نحسب الخطأ، ويكون هذا التابع أفضل تابع من هذه الزمرة ، واخيرا نقبل التابع(من هذه الزمرة) أو نرفضه حسب قيمة الخطأ. مع ملاحظة أنه لا توجد طريقة فعلية لاختيار الزمرة المناسبة .

- إذا ما هو التقارب ؟؟

هو اختيار دالة (قد تكون حدودية، تابع أسي، تابع لوغاريتمي)

بحيث قد تمر من النقاط المعطاة وقد لا تمر ولكن الشرط المهم هو أن يكون الخطأ الكلي المرتكب أصغر ما يمكن. أي أنه نعلم أنه لدينا عدة أنواع لتوابع (حدوديات، أسية، لوغريتميه،....)فنقوم بالتقريب باختيار تابع من احد هذه الأنواع بحيث يحقق أن الخطأ الكلي المرتكب هو أصغر ما يمكن.

تعاريف و مفاهيم اساسية:

1) <u>تابع الوزن</u>

نقول أن w(x) هو تابع وزن على المجال $]a,b[$ إذا وفقط اذا حقق ما يلي :

1. w تابع مستمر
2. $\forall x \in \,]a,b[\; : w(x) > 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \, , x \in \,]a,b[\; : \; \int_a^b w(x)|x|^n dx < \infty$

مثال : $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ هو تابع وزن على المجال $]-1,1[$

التقريبات

- أ –التقريب غير الخطي
  - 1- لبيانات متقطعة
  - 2 – لتوابع مستمرة
- ب –التقريب الخطي
  - 1- لبيانات متقطعة
  - 2 – لتوابع مستمرة

في التقريبات لبيانات متقطعة :

يعطى في الفرض مجموعة من البيانات (النقاط) والمطلوب إيجاد تابع مناسب تقرب البيانات إليه (نستبدل البيانات به)

في التقريب لتوابع مستمرة :

يعطى في الفرض تابع والمطلوب استبداله بتابع أخر بحيث يكون التعامل معه أسهل.

وفي كلتا الحالتين الشرط المهم هو ان يكون الخطأ الكلي المرتكب أصغر ما يمكن .

ليكن $f(x)$ تابع معرف ومستمر على المجال $[a,b]\subset\mathbb{R}$، وبفرض أن $\emptyset\in C[a,b]$،(إن $\emptyset$ هي الدالة التي نريد استبدال البيانات(النقاط بها)، بحيث:

$$\emptyset(x):=\underbrace{\emptyset(x,c_0,c_1,\dots,c_n)}_{\text{التابع} \emptyset \text{ يتبع لـ} x \text{ و للثوابت } c}=\emptyset(x,c);x\in[a,b],c=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\underbrace{(c_0,c_1,\dots,c_n)^T}_{\text{منقول}};c_k\in\mathbb{R}$$

والمطلوب هو إيجاد المعاملات(الثوابت) $c_0,c_1,\dots,c_n$ بحيث تكون المسافة بين $f(x)$ و $\emptyset(x)$ **أصغر ما يمكن**.

ونميز هنا حالتين بالنسبة للتابع $f(x)$:

أولاً: إذا كان التابع f معطى عند عدد منته من النقاط $x_i\in[a,b]$ (بيانات متقطعة) وبحيث: $y_i=f(x_i)$

عندئذ تدعى المسألة تقريب المربعات الصغرى لبيانات متقطعة .

ثانياً: إذا كان التابع f قابلا للاشتقاق أو قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$

عندئذ تدعى المسالة بمسألة تقريب المربعات الصغرى للتوابع مستمرة .

أما بالنسبة للتابع $\emptyset(\mathrm{x})$ فيتم إيجاده استنادا على :

إذا أمكن كتابته بدلالة توابع مستقلة خطيا $\varphi_i\in C[a,b]$، أي بالشكل :

$$\emptyset(x,c)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)$$

تدعى المسألة عندئذ بمسألة **التقريب الخطية**، وفيما عدا ذلك ندعوها بمسألة التقريب غير الخطية .(ويكون التقريب خطيا بالنسبة للثوابت(المعاملات) $c_0,\dots,c_n$ وليس بالنسبة للدوال $\varphi_0,\dots,\varphi_n$).

نلاحظ من العلاقة السابقة أن المجاهيل هي الثوابت، أما الدوال معلومة، ويبقى فقط أن تكون هذه الدوال مستقلة خطيا.

مثال على مسألة تقريب خطي :

$$\emptyset(x,c_0,c_1,c_2,c_3)=c_0+c_1e^{2x}+c_2\ln(x)+c_3(x^2+1)$$

مثال على مسألة تقريب غير خطية :

$$\emptyset(x,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4)=c_0\cosh(c_1x)+c_2e^{-c_3(x-c_4)}$$

في مقررنا سنأخذ فقط التقريب الخطي (أي لن نأخذ التقريب غير الخطي)

التقريب الخطي

بفرض أن $f \in C[a,b]$, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[a,b]$ توابع مستقلة خطيا ، وبفرض S مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ بحيث :

$$\forall \emptyset \in S : \ \emptyset(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

عندئذ:

$$d(f,\emptyset) = \|f - \emptyset\| \coloneqq D(c_0, c_1, \dots, c_n)$$

أي أن المسافة بين دالتين $\emptyset$ و f تعتمد على التابع $\emptyset$ (أو معاملاتها).

إن المسافة d يجب أن تكون أصغر ما يمكن ومعنى ذلك أنه يجب أن يكون مشتقها الأول بالنسبة للثوابت $(c_i; i = 0,..,n)$مساو للصفر، والمشتق الثاني لا يساوي الصفر. وقد وضعنا في العلاقة السابقة نظيما لوجود عدة قيم.

توجد بعض الأشكال المألوفة للتوابع φ_k وهي :

1. $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2, \dots \dots, \varphi_n = x^n$ (حدوديات من الدرجة n على الأكثر)
2. $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = \cos(x), \varphi_2 = \sin(x), \varphi_3 = \cos(2x), \varphi_4 = \sin(2x), ..$ (توابع مثلثية)
3. $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = e^{\alpha_1 x}, \varphi_2 = e^{\alpha_2 x}, \varphi_3 = e^{\alpha_3 x}, ..$ حيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ مختلفة .
4. التوابع المتعامدة (حدوديات لوجندر، تشيبيتشيف، لاكير، هرميت،.....)

الأن يمكن أن تصاغ مسألة التقريب الخطي بشكل عام كما يلي :

بفرض $f \in C[a,b]$، والتوابع $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ مستقلة خطيا ، والمطلوب أيجاد تركيب خطي $\emptyset^{(0)}(x) \in S$، بحيث:

$$\emptyset^{(0)}(x) \coloneqq \emptyset^{(0)}\left(x, c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots., c_n^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \varphi_k(x) \in S \dots.(*)$$

$$D\left(c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots., c_n^{(0)}\right) = \left\|f - \emptyset^{(0)}\right\| = \min_{\emptyset \in S}\|f - \emptyset\| = \min_{\varphi \in S} D(c_0, \dots, c_n) \ \dots(**)$$

توطئة (مبرهنة الوجود)

لكل جملة توابع مستقلة خطيا $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[a,b]$ ولكل نظيم $\|.\|$ يوجد على الأقل تابع تقريب $\emptyset^{(0)} \in S$ بحيث يحقق العلاقة رقم $(**)$ وذلك أيا كان $f \in C[a,b]$

التقريبات الخطي لبيانات متقطعة

في هذه الحالة تصاغ المسألة كما يلي:

نبحث عن العلاقة من الشكل $\emptyset^{(0)}$ من العلاقة

$$\emptyset^{(0)}(x) := \emptyset^{(0)}\left(x, c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \varphi_k(x) \in S$$

لأجل تابع $f \in C[a,b]$، ومعلومة عند $N+1$ نقطة مختلفة هي:

$y_i = f(x_i):$ و بحيث $x_i \in [a,b]\,, i = 0,1,2,\dots,N\,, (N \geq n)$

$$\forall g \in c[a,b]:\ \|g\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{N} w_i g^2(x_i)\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث أن: w_i أعداد حقيقية كأوزان ، و $\|g\|_2$ نصف نظيم ، وهو النظيم التربيعي وباختيارنا له نحصل على أفضل دقة.

إذا وضعنا: $g = f - \emptyset$ في العلاقة السابقة تصبح :

$$\|f - \emptyset^0\|_2^2 = \min_{\emptyset \in S} \|f - \emptyset\|_2^2 = \min \sum_{i=0}^{N} w_i\big(f(x_i) - \emptyset(x_i, c)\big)^2 = \min D^2(c_0, \dots, c_n)$$

غالبا يرمز: $E(x_i) = T - Q = f(x_i) - \emptyset(x_i, c)$, و أن : $D^2 = d_0^2 + \dots + d_n^2$

أي: D^2 هي مجموعة مربعات الأخطاء .

وبتطبيق الشروط: $\frac{\partial (D^2)}{\partial c_j^0} = 0; j = 0, \dots, n$ ، (أو تكتب $\frac{\partial (E^2)}{\partial c_j^0} = 0$) نحصل على جملة $(n+1)$ معادلة خطية بالنسبة للمجاهيل c_j^0 للتقريب الأمثل . وبما أن :

$$\frac{\partial\, \emptyset(x_i)}{\partial c_j^0} = \varphi_j(x_i) \ \ \&\ \ \emptyset(x_i, c) = \emptyset(x_i, c_0, c_1, \dots, c_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x_i)$$

فإن جملة المعادلات الخطية هي :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} w_i \underbrace{\varphi_j(x_i)}_{c_i \text{ المشتق بالنسبة}} \varphi_k(x_i)}_{(\varphi_j,\varphi_k) \text{ نرمز لها}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \underbrace{\varphi_j(x_i)}_{c_i \text{ المشتق بالنسبة}}}_{(f,\varphi_j) \text{ نرمز لها}} \quad ; j = 0, \dots, n\,; N \geq n \dots (*)$$

عندئذ: تصبح جملة المعادلات الخطية بالصيغة المصفوفية : $G\,.\,c = a$ حيث أن :

يجب حفظ هذه الصيغة المصفوفية جيدا

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}c_0^{(0)}\\ \vdots\\ c_n^{(0)}\end{pmatrix},a=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

والصيغة المصفوفية السابقة قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت التوابع $\varphi_k\,;k=0,\dots,n$ مستقلة خطيا .

◄ملاحظة:المشتق بالنسبة لـ c_0 هو φ_0، والمشتق بالنسبة لـ c_1 هو φ_1 وهكذا حتى φ_n والذي هو المشتق بالنسبة لـ c_n .

يجب الانتباه الى أن جملة معادلات الخطية السابقة (عندما $n\geq 10$) غالبا ما تكون مريضة ، ولتجنب ذلك نستخدم طرائق (QR) لتفريق المصفوفة G ، أو تغيير شكل الحدودية إلى حدودية متعامدة .

وبالتالي لتسهيل استخدام هذه المصفوفة والتعامل مع جملة معادلات نجعل بعض قيم المصفوفة اصفارا عن طريق اختيار φ_i,φ_k حدوديات متعامدة، وللقيام بهذا العمل فهنا تأتي مهمة تابع الوزن في تسهيل العمل

◄ملاحظة إن تابع الوزن يعطى دوما في نص المسألة ولا حاجة للبحث عنه، فمثلا تابع الوزن للحدوديات هو 1.

◄**ملاحظة** إذا كان $(n\geq N)$ فإن التوابع $\varphi_k\,;k=0,\dots,n$ مرتبطة خطيا ، بحيث :

إذا كان $n>N$ فإن التوابع $\varphi_k\,;k=0,\dots,n$ مرتبطة خطيا حتما

وإذا كان $n=N$ فالمسألة هي مسألة استيفاء.

التقريبات بالحدوديات الجبرية

في هذه الحالة نفترض أن : $\varphi_k(x_i)=x_i^k$ و أن : $\varphi_j(x_i)=x_i^j$ ، نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد :

$$\sum_{k=0}^{n}c_k^{(0)}\sum_{i=0}^{N}w_i x_i^{k+j}=\sum_{i=0}^{N}w_i f(x_i).x_i^j\quad ;j=0,\dots,n\,;N\geq n\dots(\#)$$

بفرض أن : $w_i=1$ (أنها حدوديات). عندئذ تصبح جملة المعادلات الخطية $(*)$ بشكلها المصفوفي كما يلي :

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}c_0^{(0)}\\ c_1^{(0)}\\ c_2^{(0)}\\ \vdots\\ c_n^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ (f,\varphi_2)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix}\dots\dots(\#\#)$$

إن المقصود (φ_j,φ_k) هو **جداء داخلي** وليس ثنائي

لنحسب الأن القيم داخل المصفوفة G ، من العلاقة $(*)$ لدينا التالي :

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{N} w_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$$

ومنه (وبملاحظة أن في التقريب للحدوديات يكون : $\varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2,\dots,\varphi_n=x^n$ و أن $w_i=1$)

فنجد أن :

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{N} w_i\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i)=\sum_{i=0}^{N}(1).(1).(1)=\underbrace{N+1}_{\text{عدد النقاط المعطاة}}$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{N} w_i\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{N}(1).(1).(x_i)=\sum_{i=0}^{N}(x_i)$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{N} w_i\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{N}(1).(x_i).(x_i)=\sum_{i=0}^{N}(x_i^2)$$

ونستمر بالحساب على هذا النحو من أجل كل عناصر المصفوفة، فتصبح المصفوفتين G,a (حيث قمنا بالمثل لـ a) من الشكل :

$$G=\begin{pmatrix} N+1 & \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \dots & \sum_{i=0}^{N}(x_i^n) \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^2) & \dots & \sum_{i=0}^{N}(x_i^{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i^n) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^{n+1}) & \dots & \sum_{i=0}^{N}(x_i^{2n}) \end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} f(x_i)=y_i \\ \sum_{i=0}^{N} f(x_i).x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} f(x_i).x_i^n \end{pmatrix}$$

وبالتعويض في العلاقة $(\#\#)$، نحصل على الصيغة المصفوفية للطريقة المدروسة كما يلي :

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \dots & \sum_{i=0}^{N}(x_i^n) \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^2) & \dots & \sum_{i=0}^{N}(x_i^{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i^n) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^{n+1}) & \dots & \sum_{i=0}^{N}(x_i^{2n}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} f(x_i) = y_i \\ \sum_{i=0}^{N} f(x_i).x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} f(x_i).x_i^n \end{pmatrix}$$

حالات خاصة :

1) $n = 1$ تقريب البيانات إلى مستقيم

لدينا $N+1$ نقطة مختلفة و $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ بحيث : $i = 0, \dots, N$ ، والتقريب لمستقيم معادلته بالشكل :

$$y = \emptyset^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{1} c_k^{(0)}.x^k \Longrightarrow y = c_0^{(0)} + c_1^{(0)}.x$$

نعوض في الصيغة المصفوفية الأخيرة فنجد أن :

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum_{i=0}^{N}(x_i) \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} y_i \\ \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \end{pmatrix}$$

نرمز :

$$S_x = \sum_{i=0}^{N} x_i \ , S_{xx} = \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \ , S_{xy} = \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \ , S_y = \sum_{i=0}^{N} y_i$$

الأن بالتعويض في الشكل المصفوفي ومن ثم حل جملة المعادلات، نجد ما يلي :

$$\begin{pmatrix} N+1 & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} (N+1).c_0^{(0)} + S_x.c_1^{(0)} = S_y & (1) \\ S_x.c_0^{(0)} + S_{xx}.c_1^{(0)} = S_{xy} & (2) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{من}(1)} c_0^{(0)} = \frac{S_y - S_x.c_1^{(0)}}{N+1} \xRightarrow{\text{نعوض في}(2)} S_x.\left(\frac{S_y - S_x.c_1^{(0)}}{N+1}\right) + S_{xx}.c_1^{(0)} = S_{xy} \quad (3)$$

$$\Longrightarrow S_x.S_y - S_x S_x c_1^{(0)} + (N+1)S_{xx}.c_1^{(0)} = (N+1)S_{xy}$$

$$\Rightarrow \left(c_1^{(0)} = \frac{(N+1)S_{xy} - S_x.S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x} \right)$$

نعوض الأن قيمة $c_1^{(0)}$ في العلاقة (3) فنجد :

$$c_0^{(0)} = \frac{S_y - S_x.\left(\frac{(N+1)S_{xy} - S_x.S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x}\right)}{N+1} \Rightarrow \left(c_0^{(0)} = \frac{S_{xx}.S_y - S_{xy}.S_x}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x} \right)$$

أي أن حل جملة المعادلات هي :

$$c_0^{(0)} = \frac{S_{xx}.S_y - S_{xy}.S_x}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x} \quad , c_1^{(0)} = \frac{(N+1)S_{xy} - S_x.S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x}$$

يرجى الانتباه في السؤال على صيغة السؤال لمعرفة عدد الثوابيب المراد إيجادها

تمرين:

أوجد معادلة المستقيم الذي يقرب البيانات التالية: (7,8,3), (5,6,1), (2,2,9), (1,2,1)

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب .

الحل :

نعلم أن معادلة التقريب إلى مستقيم هي : $\boldsymbol{y = c_0^{(0)} + c_1^{(0)} x}$ ، لنوجد الأن قيم كل من $c_0^{(0)}$ و $c_1^{(0)}$. كما وجدنا منذ قليل وذلك عن طريق حساب ما يلي :

$$S_x = \sum_{i=0}^{N} x_i \; , S_{xx} = \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \; , S_{xy} = \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \; , S_y = \sum_{i=0}^{N} y_i$$

لننشئ الجدول لتسهيل الحل

x_i	y_i	$x_i.y_i$	x_i^2
$x_0 = 7$	$y_0 = 8.3$	$(7)(8.3)$	49
$x_1 = 5$	$y_1 = 6.1$	$(5)(6.1)$	25
$x_2 = 2$	$y_2 = 2.9$	$(2)(2.9)$	4
$x_3 = 1$	$y_3 = 2.1$	$(1)(2.1)$	1
$S_x = \sum_{i=0}^{3} x_i = 15$	$S_y = \sum_{i=0}^{3} y_i = 19.4$	$S_{xy} = \sum_{i=0}^{3} x_i y_i = 96.5$	$S_{xx} = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 79$

لدينا الأن :

$$c_0^{(0)} = \frac{S_{xx}.S_y - S_{xy}.S_x}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x} = \frac{(79)(19.4) - (96.5)(15)}{(4).(79) - (15)(15)} = 0.93520$$

$$c_1^{(0)} = \frac{(N+1)S_{xy} - S_x.S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x.S_x} = \frac{(4)(96.5) - (15)(19.4)}{(4).(79) - (15)(15)} = 1.04396$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب هو :

$$y = 0.9352 + 1.04396\,x$$

حساب الخطأ الكلي :

يحسب الخطأ من العلاقة

$$E^2 = \sum_{i=0}^{3}[f(x_i) - y_i]^2$$

وبالتالي :

$$E^2 = \underbrace{[f(x_0) - y_0]^2}_{E_0^2} + \underbrace{[f(x_1) - y_1]^2}_{E_1^2} + \underbrace{[f(x_2) - y_2]^2}_{E_2^2} + \underbrace{[f(x_3) - y_3]^2}_{E_3^2}$$

حيث أن :

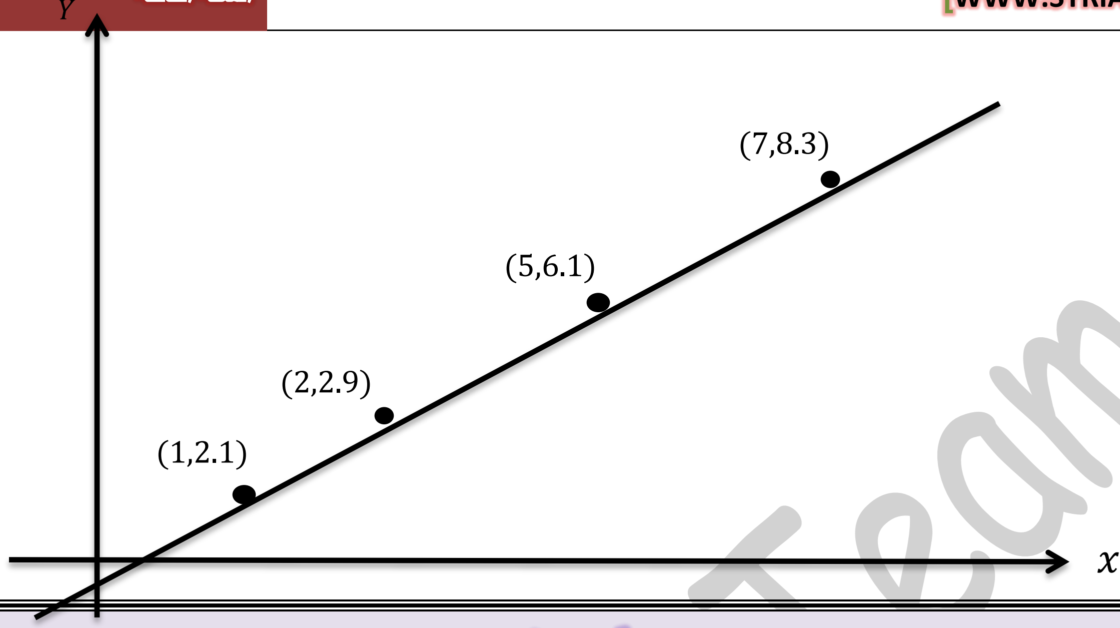
$$\begin{cases} f(x_0) = 0.9352 + 1.04396(7) = 8.24292 \\ f(x_1) = 0.9352 + 1.04396(5) = 6.1550 \\ f(x_2) = 0.9352 + 1.04396(2) = 3.02320 \\ f(x_3) = 0.9352 + 1.04396(1) = 1.9792 \end{cases}$$

ومنه:

$$E^2 = [8.24292 - 8.3]^2 + [6.155 - 6.1]^2 + [3.0232 - 2.9]^2 + [1.9792 - 2.1]^2 = 0.03605$$

وبجذر الناتج الأخير نحصل على الخطأ المرتكب المطلوب: $E = 0.18988$

أخيرا ،يبين الشكل التالي البيانات المعطاة والمستقيم الذي قربنا النقاط إليه:



تمرين:

قرب البيانات باستخدام تابع خطي ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب :

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	9	7	5	4	3	0	-1

الحل :

بحساب كل من S_x, S_{xx}, S_{xy}, S_y

$$S_x = \sum_{i=1}^{8} x_i = 20 \quad , \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 92$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 25 \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^{8} y_i = 37$$

وبذلك نجد :

$$c_0^{(0)} = \frac{S_{xx}.S_y - S_{xy}.S_x}{nS_{xx} - S_x.S_x} = \frac{(92)(37) - (25)(20)}{(8).(92) - (20)(20)} = \frac{3404 - 500}{736 - 400} = \frac{2904}{336} = 8.64286$$

$$c_1^{(0)} = \frac{nS_{xy} - S_x.S_y}{nS_{xx} - S_x.S_x} = \frac{(8)(25) - (20)(37)}{(8).(92) - (20)(20)} = \frac{200 - 740}{736 - 400} = \frac{-540}{336} = -1.60714$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب

$$f(x) = -1.60714x + 8.64286$$

ومنه:

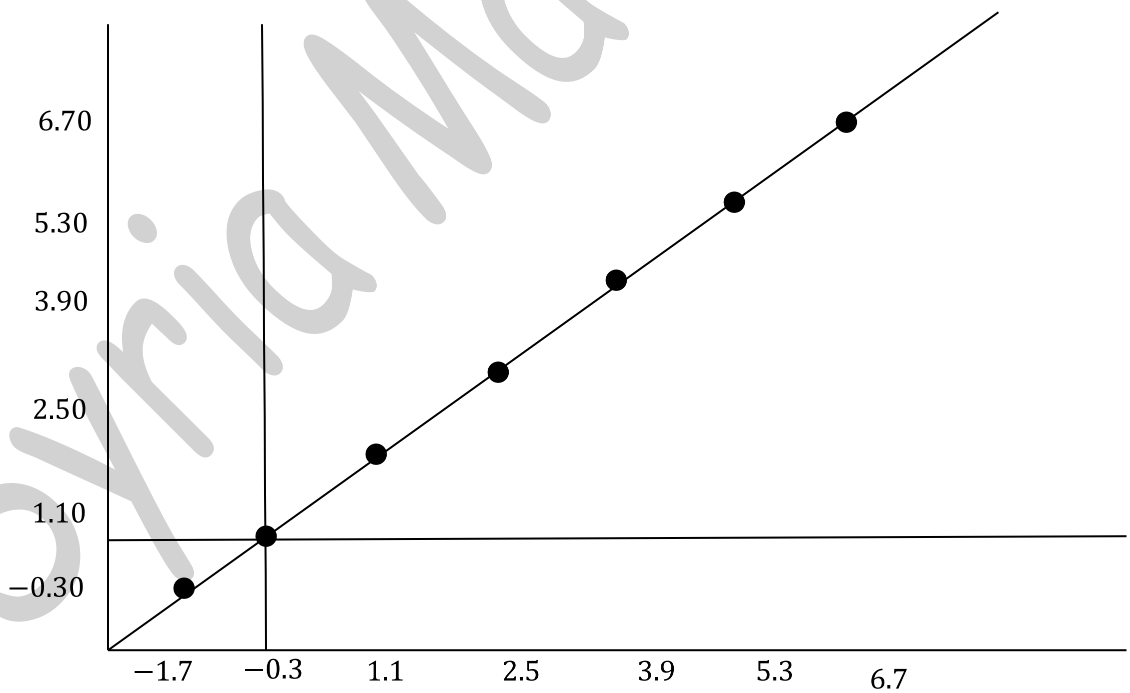
$$f(x_0) = -1.60714(-1) + 8.64286 = 10.25$$
$$f(x_1) = -1.60714(0) + 8.64286 = 8.64286$$
$$f(x_2) = -1.60714(1) + 8.64286 = 7.03572$$
$$f(x_3) = -1.60714(2) + 8.64286 = 5.42858$$
$$f(x_4) = -1.60714(3) + 8.64286 = 3.82144$$
$$f(x_5) = -1.60714(4) + 8.64286 = 2.21430$$
$$f(x_6) = -1.60714(5) + 8.64286 = 0.60716$$
$$f(x_7) = -1.60714(6) + 8.64286 = -0.99998$$

ويكون الخطأ المرتكب :

$$E^2 = \sum_{i=0}^{7} [f(x_i) - y_i]^2$$

$$E^2 = [0.25]^2 + [-0.35714]^2 + [0.03572]^2 + [0.42858]^2 + [-0.17856]^2 + [-0.78570]^2 + [0.60716]^2 + [0.00002]^2 = 1.39286$$

$$\Longrightarrow E = \sqrt{E^2} = 1.18019$$



2) $n = 2$ تقريب البيانات إلى قطع مكافئ (حدودية درجة ثانية):

لدينا $N+1$ نقطة مختلفة، و $i=0,\dots,N$، والتقريب إلى قطع مكافئ معادلته:

$$y=\emptyset^{(0)}(x)=\sum_{k=0}^{2}c_k^{(0)}x^k \Longrightarrow y=c_0^{(0)}+c_1^{(0)}x+c_2^{(0)}x^2$$

نعوض في الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية، فنجد:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^2) \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^2) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^3) \\ \sum_{i=0}^{N}(x_i^2) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^3) & \sum_{i=0}^{N}(x_i^4) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N}y_i \\ \sum_{i=0}^{N}x_i.y_i \\ \sum_{i=0}^{N}x_i^2y_i \end{pmatrix}$$

وبحساب قيم المجاميع داخل المصفوفات وتعويضها، نحصل على قيم المعاملات $c_0^{(0)},c_1^{(0)},c_2^{(0)}$ ،ومن ثم نعوضها في عبارة التابع فنحصل على تابع التقريب المطلوب .

ومن أجل العمومية : للتقريب لحدودية من الدرجة m، تكون هذه الحدودية من الشكل :

$$f(x)=c_0^{(0)}+c_1^{(0)}x+c_2^{(0)}x^2+\cdots+c_m^{(0)}x^m;m\geq 1$$

وبإجراء ذات الخطوات الموضحة مع مراعاة درجة الحدودية، نحصل على قيم المعاملات، ومن ثم على تابع التقريب المراد

تـمريـن:

أوجد معادلة تابع من الدرجة الثانية الذي يقرب البيانات التالية :

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	0	1.19	0.26	0.29	0.31

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحـل :

بملاحظة أن عدد البيانات في هذا التمرين 5 لنقم بحساب المجاميع

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 , \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 7.5 , \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 12.5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 22.125 , \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1.41$$

ومنه نجد:

$$c_0^{(0)}(5) + c_1^{(0)}(5) + c_2^{(0)}(7.5) = 1.05$$

$$c_0^{(0)}(5) + c_1^{(0)}(7.5) + c_2^{(0)}(12.5) = 1.41$$

$$c_0^{(0)}(7.5) + c_1^{(0)}(12.5) + c_2^{(0)}(22.125) = 2.2$$

وبحل هذه الجملة من المعادلات نجد :

$$c_0^{(0)} = 0.01171 \ , c_1^{(0)} = 0.36114 \ , c_2^{(0)} = -0.10860$$

ويكون التابع التربيعي المطلوب :

$$f(x) = -0.1086x^2 + 0.36114x + 0.01171$$

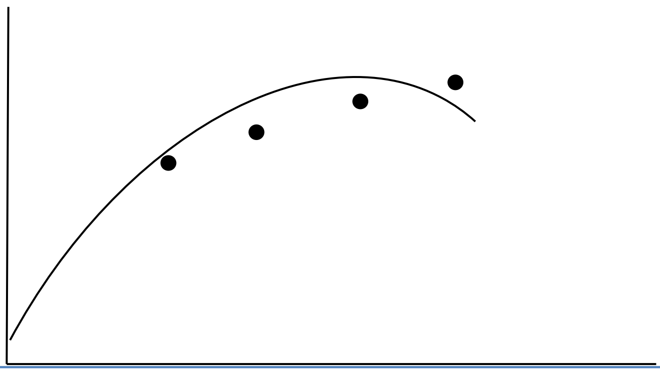
وقيمة الخطأ المرتكب :

$$E^2 = \sum_{i=0}^{4} (f(x_i) - y_i)^2 = 0.00125 \Longrightarrow E = 0.03536$$

ويبين الجدول قيم التابع المقرب عند البيانات المعطاة :

x_i	y_i	$f(x_i)$	$f(x_i) - y_i$	$(f(x_i) - y_i)^2$
0	0	0.0117	0.0117	**0.00014**
0.5	0.19	0.16513	−0.02487	**0.00062**
1	0.26	0.26425	0.00425	**0.00002**
1.5	0.29	0.30907	0.01907	**0.00036**
2	0.31	0.29959	−0.01041	**0.00011**

يوضح شكل الرسم البياني للبيانات المعطاة والتابع المقرب :



التقريبات بالحدوديات المتعامدة

قلنا مسبقا أنه كي نتجنب مرض جملة المعادلات الخطية نستخدم الحدوديات المتعامدة . وهذا ما سنفعله في هذه الفقرة.

في هذه الحالة نفترض أن $\varphi_k(x_i) = Q_k$ ، كتقريب للتابع $\emptyset$ ، فيكون :

$$\emptyset: \emptyset(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k . Q_k = c_0 . Q_0 + \cdots + c_n . Q_n$$

حيث نشترط أن : $j \neq k \;\; ; \;\; (\varphi_j, \varphi_k) = (\varphi_k, \varphi_j) = 0$ ، وبالتالي تكون المصفوفة G في الصيغة المصفوفية لجملة المعادلات الخطية مصفوفة قطرية ، عندئذ لا يوجد عمليات عدية كثيرة لإيجاد الحل، فسينتج معنا مباشرة. وبذلك تجنبنا مرض الجملة . **ويتم حساب المعاملات (الثوابت) $c_j^{(0)}$ بالشكل** :

$$c_j^{(0)} = \frac{(f, Q_j)}{(Q_j, Q_j)} \; ; j = 0, \dots, n \;\; ; \begin{cases} (Q_j, Q_j) := \sum_{i=0}^{N} w_i . Q_j^{(2)}(x_i) \\ (f, Q_j) := \sum_{i=0}^{N} w_i . f(x_i) . Q_j(x_i) \end{cases}$$

ويمكن حساب الحدوديات المتعامدة Q_k بشكل تعاودي(غرام_شميدث) ضمن المجال $[a, b]$ بالنسبة لتابع الوزن $\mathrm{w}(x)$، كما يلي :

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x - b_1$$

$$\vdots$$

$$Q_k(k) = (x - b_k)Q_{k-1}(x) - d_k.Q_{k-2}(x)\ ;k \geq 2$$

حيث أن :

$$x \in [a,b]\ ,\qquad b_k = \frac{(x.Q_{k-1}\ ,Q_{k-1})}{(Q_{k-1}\ ,Q_{k-1})}\ ;k \geq 1\quad ,d_k = \frac{(Q_{k-1}\ ,Q_{k-1})}{(Q_{k-2} - Q_{k-2})};k \geq 2$$

مع ملاحظة أن :

$$(x.Q_{k-1}\ ,Q_{k-1}) = \sum_{i=0}^{N} w_i.x_iQ_{k-1}(x_i)$$

فائدة الحدوديات المتعامدة

هي في جعل جميع عناصر القطر الرئيسي أصفارا ماعدا عناصر القطر الرئيسي مما يجعل الحل بسيطا .

التقريبات الخطي لتوابع مستمرة

في التقريب الخطي لبيانات متقطعة كنا نستبدل نقاطا معطاة بتابع تقريب، أما هنا فسنسعى لاستبدال تابعا معطى بتابع أخر بحيث يكون التعامل معه أسهل.

◄ملاحظة لن تختلف هنا عن ما سبق باستثناء ان المجاميع ستصبح تكاملات .

تصاغ المسألة في هذه الحالة على نحو التالي:

نبحث عن تابع $\emptyset^{(0)}$ من الشكل:

$$\emptyset^{(0)}(x) := \emptyset^{(0)}\left(x, c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)}.\varphi_k(x) \in S$$

S مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من الدوال المستقلة خطيا $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

لأجل تابع $f \in C[a,b]$، بحيث:

$$\underbrace{\|g\|_2}_{\text{نصف نظيم تربيعي}} = \left(\int_a^b w.g^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \;;\; \underbrace{w}_{\text{تابع وزن}} \;, g \in C[a,b]$$

إذا وضعنا $g = f - \emptyset$ في العلاقة السابقة

$$D\left(c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}\right) = \|f - \emptyset^{(0)}\| = \min_{\emptyset \in S}\|f - \emptyset\| = \min_{\varphi \in S} D(c_0, \dots, c_n)$$

تصبح:

$$\|f - \emptyset^{(0)}\|_2^2 = \min_{\emptyset \in S}\|f - \emptyset\|_2^2 = \min_{\emptyset \in S}\int_a^b w\big(f(x) - \emptyset(x,c)\big)^2 dx = \min_{\emptyset \in S} D^2(c_0, \dots, c_n)$$

ويرمز:

$$E(x) = f(x) - \emptyset(x,c)$$

وبتطبيق الشروط: $\frac{\partial(D^2)}{\partial c_j^{(0)}} = 0 \;;\; j = 0, \dots, n$ ، نحصل على الجملة $(n+1)$ معادلة خطية ، بالمجاهيل $c_j^{(0)}$: بحيث عددهم $(n+1)$ مجهول، من الشكل :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \underbrace{\int_a^b w(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx}_{(\varphi_j,\varphi_k)} = \underbrace{\int_a^b w(x)f(x)\varphi_j(x)\,dx}_{(f,\varphi_j)} \;; j = 0, \dots, n \quad \dots(*)$$

وتصبح الصيغة المصفوفية لجملة المعادلات الخطية على النحو التالي :

$$G.c = a \Longrightarrow \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \dots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & \dots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ \vdots \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن: $G = G^T \Leftrightarrow (\varphi_j,\varphi_k) = (\varphi_k,\varphi_j)$.

التقريب بالحدوديات الجبرية

في هذه الحالة نفترض أن : $\varphi_k(x_i) = x_i^k$ و أن : $\varphi_j(x_i) = x_i^j$ ، نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \int_a^b w(x).x^{k+j}\,dx = \int_a^b w(x)f(x)x^j dx \;; j = 0, \dots, n$$

بفرض أن : $w(x) = 1$، تكون جملة المعادلات السابقة بصيغتها المصفوفية على النحو التالي :

$$G.c = a \;; \underbrace{\begin{pmatrix} \int_a^b dx & \int_a^b x\,dx & \cdots & \int_a^b x^n\,dx \\ \int_a^b x\,dx & \int_a^b x^2\,dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1}\,dx \\ \cdots & \cdots & & \vdots \\ \int_a^b x^n\,dx & \int_a^b x^{n+1}\,dx & \ddots\cdots & \int_a^b x^{2n}\,dx \end{pmatrix}}_{G} . \underbrace{\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} \int_a^b f(x).dx \\ \int_a^b x\,f(x).dx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x).dx \end{pmatrix}}_{a}$$

حالة خاصة $n = 2$

لنوجد حدودية المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع $f(x)$ على المجال $[-1,1]$، نسعى لإيجاد الحدودية :

$$P_2(x) = c_0^{(0)} + c_1^{(0)}x + c_2^{(0)}x^2$$

بحيث يكون الخطأ الكلي المرتكب أصغر ما يمكن.

بملاحظة أن $n = 2$ يكون لدينا ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل ، وبالتعويض في الصيغة المصفوفية لجملة المعادلات نجد:

$$G.c = a \Longrightarrow \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} dx & \int_{-1}^{1} x\,dx & \int_{-1}^{1} x^2 dx \\ \int_{-1}^{1} x\,dx & \int_{-1}^{1} x^2\,dx & \int_{-1}^{1} x^3\,dx \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx & \int_{-1}^{1} x^3\,dx & \int_{-1}^{1} x^4\,dx \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} f(x)dx \\ \int_{-1}^{1} x.f(x)dx \\ \int_{-1}^{1} x^2.f(x)dx \end{pmatrix}$$

تحسب قيم التكاملات داخل المصفوفة G، فنجد:

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = 2 \quad , \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \quad , \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \quad , \quad \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

نعوض في الصيغة المصفوفية فنجد:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} f(x)dx \\ \int_{-1}^{1} x.f(x)dx \\ \int_{-1}^{1} x^2.f(x)dx \end{pmatrix}$$

نجري عمليات الضرب ، ونطابق طرفي المساواة فنجد:

$$2c_0^{(0)} + \frac{2}{3}c_2^{(0)} = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$\frac{2}{3}c_1^{(0)} = \int_{-1}^{1} x.f(x)dx$$

$$\frac{2}{3}c_0^{(0)} + \frac{2}{5}c_2^{(0)} = \int_{-1}^{1} x^2.f(x)dx$$

وبحل جملة المعادلات الثلاث نجد بسهولة أن :

$$c_0^{(0)} = \frac{9}{8}\int_{-1}^{1} f(x)dx - \frac{15}{8}\int_{-1}^{1} x^2.f(x)dx$$

$$c_1^{(0)} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x.f(x)dx$$

$$c_2^{(0)} = \frac{45}{8}\int_{-1}^{1} x^2.f(x)dx - \frac{15}{8}\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

والخطأ المرتكب يحسب عبر العلاقة:

$$E = \sqrt{\int_{a}^{b} [f(x) - P_n(x)]^2}$$

تـمريـن:

أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع :

$$f(x) = Sin\,\pi x$$

وذلك على المجال $[0,1]$، واحسب قيمة الخطأ المرتكب.

الحـــل :

بملاحظة أن الحدودية المطلوبة من الدرجة الثانية، أي $n = 2$ و أن $[a,b] = [0,1]$، تنتج لدينا جملة المعادلات :

$$c_0^{(0)}\int_0^1 (1)dx + c_1^{(0)}\int_0^1 x.dx + c_2^{(0)}\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 (1)(Sin\,\pi x)dx$$

$$c_0^{(0)}\int_0^1 x\,dx + c_1^{(0)}\int_0^1 x^2.dx + c_2^{(0)}\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x\,(Sin\,\pi x)dx$$

$$c_0^{(0)}\int_0^1 x^2dx + c_1^{(0)}\int_0^1 x^3.dx + c_2^{(0)}\int_0^1 x^4\,dx = \int_0^1 x^2(Sin\,\pi x)dx$$

لنحسب قيم التكاملات السابقة :

$$\int_0^1 (1)dx = 1\ , \qquad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\ ,\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\ ,\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}\ ,\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 (1)(Sin\,\pi x)dx = 0.63662\ ,\int_0^1 x(Sin\,\pi x)dx = 0.31830\ ,\int_0^1 x^2(Sin\,\pi x)dx = 0.18930$$

بتعويض قيم التكاملات في جملة المعادلات نجد أن:

$$c_0^{(0)} + \frac{1}{2}c_1^{(0)} + \frac{1}{3}c_2^{(0)} = 0.63662$$

$$\frac{1}{2}c_0^{(0)} + \frac{1}{3}c_1^{(0)} + \frac{1}{4}c_2^{(0)} = 0.31830$$

$$\frac{1}{3}c_0^{(0)} + \frac{1}{4}c_1^{(0)} + \frac{1}{5}c_2^{(0)} = 0.18930$$

وبحل جملة المعادلات الأخيرة نجد أن

$$c_0^{(0)} = -0.05022\,, c_1^{(0)} = 4.12128\,, c_2^{(0)} = -4.12140$$

وتكون حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع $f(x) = Sin\,\pi x$ هي:

$$P_2(x) = -4.12140\,x^2 + 4.12128\,x - 0.05022$$

لنوجد أخيرا قيمة الخطأ المرتكب عن طريق العلاقة

$$E=\sqrt{\int_a^b [f(x)-P_n(x)]^2}$$

نلاحظ أن

$$E=\sqrt{\int_a^b \left(f(x)-P_2(x)\right)^2}=\sqrt{\int_0^1 \left(f^2(x)-2f(x)P_2(x)+P_2^2(x)\right)dx}$$

$$\Longrightarrow E=\sqrt{\int_0^1 (Sin\pi x)^2\,dx-2\int_0^1 (Sin\,\pi x)P_2(x)\,dx+\int_0^1 P_2^2(x)dx}$$

$$\Longrightarrow E=\sqrt{0.5-0.99935+0.49965}\ \Longrightarrow E=0.01732$$

تـمريـن:

أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع : $f(x)=e^x$ على المجال $[-1,1]$، ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب.

الحــل

بملاحظة أن الحدودية المطلوبة من الدرجة الثانية، أي $n=2$ و أن $[a,b]=[-1,1]$، تنتج لدينا جملة المعادلات :

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}(1)dx+c_1^{(0)}\int_{-1}^{1}x.dx+c_2^{(0)}\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\int_{-1}^{1}(1)e^x dx$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}x\,dx+c_1^{(0)}\int_{-1}^{1}x^2.dx+c_2^{(0)}\int_{-1}^{1}x^3\,dx=\int_{-1}^{1}x\,e^x dx$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}x^2dx+c_1^{(0)}\int_{-1}^{1}x^3.dx+c_2^{(0)}\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\int_{-1}^{1}x^2e^x dx$$

بإيجاد قيم التكاملات السابقة، ومن ثم تعويضها في جملة المعادلات السابقة نجد أن :

$$2c_0^{(0)} + 0c_1^{(0)} + \frac{2}{3}c_2^{(0)} = 2.35040 \Longrightarrow 2c_0^{(0)} + \frac{2}{3}c_2^{(0)} = 2.35040$$

$$0c_0^{(0)} + \frac{2}{3}c_1^{(0)} + 0c_2^{(0)} = 0.73576 \Longrightarrow \frac{2}{3}c_1^{(0)} = 0.73576$$

$$\frac{2}{3}c_0^{(0)} + 0c_1^{(0)} + \frac{2}{5}c_2^{(0)} = 0.87888 \Longrightarrow \frac{2}{3}c_0^{(0)} + \frac{2}{5}c_2^{(0)} = 0.87888$$

وبحل جملة المعادلات الأخيرة نجد ان

$$c_0^{(0)} = 0.99630 \quad , c_1^{(0)} = 1.10364 \quad , c_2^{(0)} = 0.53670$$

ومن ثم حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع المعطى هي :

$$P_2(x) = 0.53670x^2 + 1.10364\,x + 0.99630$$

لنوجد أخيرا الخطأ المرتكب

$$E = \sqrt{\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2} \Longrightarrow E = \sqrt{\int_{-1}^{1} (f(x) - P_2(x))^2}$$

$$\Longrightarrow E = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x).dx - 2\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx + \int_{-1}^{1} P_2^2(x)dx}$$

$$\Longrightarrow E = \sqrt{3.62686 - 7.25083 + 3.62541} = \sqrt{0.00144} = 0.03795$$

التقريب بالحدودية المتعامدة

وجدنا في الصيغة المصفوفية بشكلها العام في الفقرة السابقة عددا كبيرا من التكاملات ، وبالتالي فإن الوسيلة التي تمكننا من جعل معظم هذه التكاملات أصفارا تكمن في أن نأخذ حدوديات متعامدة بحيث يصبح الجداء الداخلي لمعظم القيم مساو للصفر . وهذا ما سنقدمه في فقرتنا هذه.

في هذه الحالة نفترض أن $\varphi_k(x_i) = Q_k$ كتقريب للتابع $\emptyset$ ، حيث:

$$\emptyset : \emptyset(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k . Q_k = c_0 . Q_0 + \cdots + c_n . Q_n$$

حيث نشترط أن : $(\varphi_j, \varphi_k) = (\varphi_k, \varphi_j) = 0 \quad ; \quad j \neq k$.

عندئذ تصبح المصفوفة G(في الصيغة المصفوفية لجملة المعادلات) قطرية، ويتم حساب المعاملات: $c_j^{(0)}$ كما يلي :

$$c_j^{(0)} = \frac{(f, Q_j)}{(Q_j, Q_j)} \; ; j = 0, \dots, n \; ; \begin{cases} (Q_j, Q_j) := \int_a^b w(x). Q_j^2(x) dx \\ (f, Q_j) := \int_a^b w(x). f(x). Q_j(x) dx \end{cases}$$

ويجب حفظ هذه العلاقة.

ويبين الجدول التالي **أشهر الدوال المتعامدة**

اسم الحدودية	المجال	$w(x)$	b_k	d_k
لوجندر	$]-1,1[$	1	0	$\frac{1}{4 - k^{-2}}$
تشيبتشيف	$]-1,1[$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	0	$\begin{cases} \frac{1}{2} \; ; k = 1 \\ \frac{1}{4} \; ; k \geq 2 \end{cases}$
لاكير	$]0, \infty[$	e^{-x}	$2k+1$	K^2
هرميت	$]-\infty, \infty[$	e^{-x^2}	0	$\frac{k}{2}$

انتهت المحاضرة

إعداد:لبنى الطون– شهناز طاطيش –عبد الرحمن البحش