24+21-4-2018

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة: الثالثة عشر والرابع عشر

عنوان المحاضرة: تمارين على تكامل استيلجس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. تمارين على تكامل استيلجس
2. التأويل لتكامل استيلجس

التمارين:

-1 احسب التكامل التالي:

$$I = \int_{-2}^{2} x^2 \, dg \quad : \quad g(x) = \begin{cases} x + 2 & : \ -2 \le x \le -1 \\ 2 & : \ -1 < x < 0 \\ x^2 + 3 & : \ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

حيث $f(x) = x^2$ ثم استنتج $\int_{-2}^{2} g \, dx^2$

ملاحظة: نحن نعلم أن نقاط البداية و النهاية من المجال a, b حيث:

$$(S) \int_a^b f \ \ dg = f(a). g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k). g_k + f(b). g_b$$

و لكن اذا وجد استمرار عند a, b فإن تكامل استيلجس يكتب بالشكل التالي

$(S) \int_a^b f \ \ dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k). g_k$ و لا يؤثر في الحال الإستمرار ان وضع الأول ايضا يكون بالحساب جوابه صفر عند نقطة البداية و النهاية

الحل:

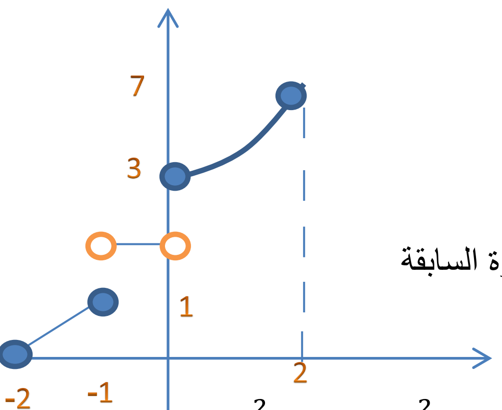
نلاحظ أن f دالة مستمرة على المجال $[-2,2]$ و أن $g(x)$ تعاني من عدد من الانقطاعات من النوع الأول $c_1 = -1$ و $c_2 = 0$ و g' موجودة على المجالات المفتوحة

$$]-2,-1[\quad , \quad]-1,0[\quad , \quad]0,2[$$

منه حسب مبرهنة (في المحاضرة السابقة الصفحة 7) فإن التكامل موجود و يمكن حسابه كالتالي من :

$$\int_{-2}^{2} f\ \ dg = \int_{-2}^{c_1=-1} f\ \ g'dx + \int_{-1}^{c_2=0} f\ \ g'dx + \int_{0}^{2} f\ \ g'dx + f(-2).g_{-2} + \sum_{k=1}^{2} f(c_k)g_k + f(2).g_2$$

$$\int_{-2}^{2} x^2\, dg = \int_{-2}^{-1} x^2\,(1)dx + \int_{-1}^{0} x^2\,(0)dx + \int_{0}^{2} x^2\,(2x)dx + f(-2)[g(-2+0) - g(-2)]$$
$$+ f(-1)[g(-1+0) - g(-1-0)] + f(0)[g(0+0) - g(0-0)]$$
$$+ f(2)[g(2) - g(2-0)]$$



$$\int_{-2}^{2} x^2\, dg = \int_{-2}^{-1} x^2\, dx + \int_{0}^{2} 2x^3\, dx + (1)[2-1] + 0[3-2]$$

$$\int_{-2}^{2} x^2\, dg = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}[x^4]_0^2 + 1 = \frac{34}{3}$$

و الأن لاستنتاج $\int_{-2}^{2} g\ dx^2$ حسب الخاصة التاسعة لتكامل استيلجس من المحاضرة السابقة

فإن كون $\int_{-2}^{2} f(x)dg$ موجود فإن $\int_{-2}^{2} g(x)\ df$ يكون موجود و تتحقق العلاقة

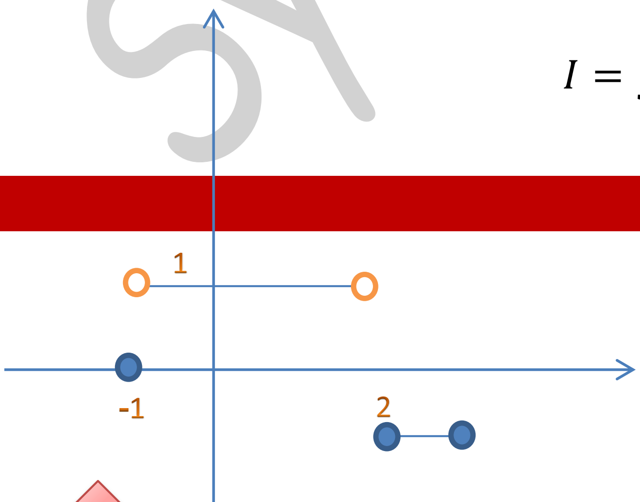
$$\int_{-2}^{2} f\ dg + \int_{-2}^{2} g\ \ df = [f(x).g(x)]_{-2}^{2} = f(2).g(2) - f(-2).g(-2) \Rightarrow$$

$$\frac{34}{3} + \int_{-2}^{2} g\ \ dx^2 = [4.7] - [4.0] \Longrightarrow \int_{-2}^{2} g\ \ dx^2 = 28 - \frac{34}{3} = \frac{84}{3} - \frac{34}{3} = \frac{50}{3}$$

2- احسب التكامل

$$I = \int_{-1}^{3} (x+1)dg \qquad : g(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = -1 \\ 1 & : \quad -1 < x < 2 \\ -1 & : \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

الحل:



نلاحظ أن نقاط الانقطاع هي $C_1 = -1$ و $C_2 = 2$

و بنفس طريقة التمرين السابق نقوم بحساب هذا التكامل.

3

$$\int_{-1}^{3}(x+1)dg = f(-1)[g(-1+0)-g(-1)] + f(2)[g(2+0)-g(2-0)]$$

$$\int_{-1}^{3}(x+1)dg = 0[1-0]+3[-1-1] = -6$$

ملاحظة: التكامل يمكن أن يكون جوابه سالب ولكن المساحة دائما موجبة (مثل عند ايجاد تكامل لتابع المنحني البياني له يقع اسفل ox نقوم بضربه ب (-) ليكون الجواب موجب)بينما هنا نقوم بحساب التكامل

3- أحسب التكاملين التاليين:

$$k_3 = \int_0^3 \lceil x \rceil \, d\lfloor x \rfloor \quad و \quad k_n = \int_0^n \lceil x \rceil \, d\lfloor x \rfloor$$

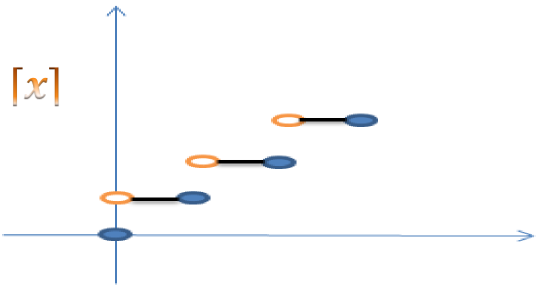
ثم برهن أن $\int_0^n f(x)d\lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{n} a_k$

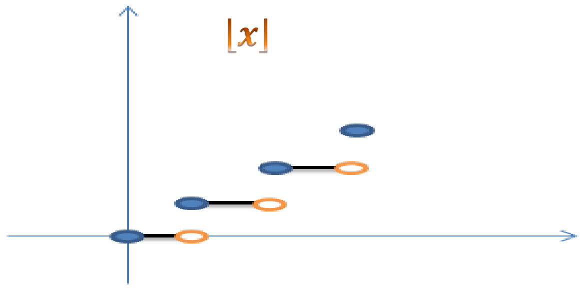
حيث
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ a_1 & : 0 < x \le 1 \\ a_2 & : 1 < x \le 2 \\ a_n & : n-1 < x \le n \end{cases}$$

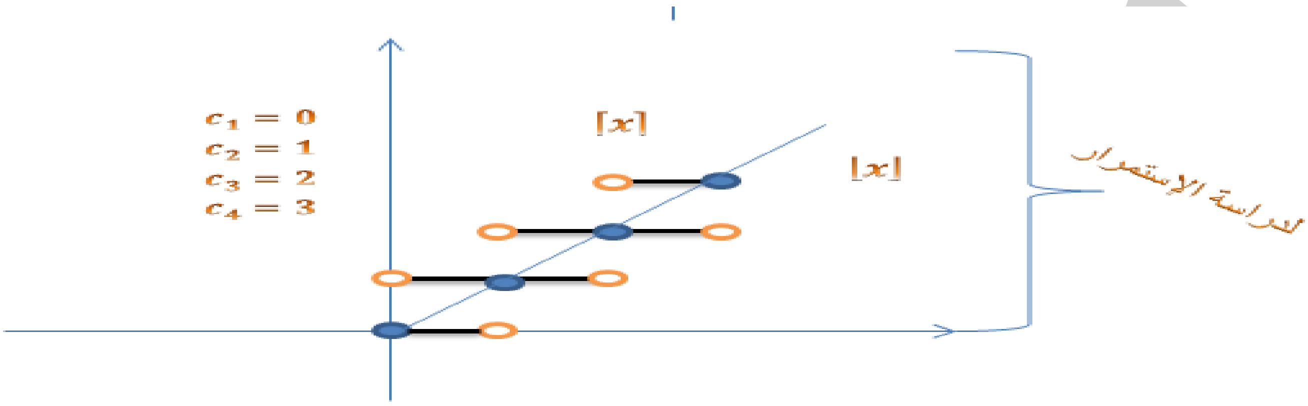
الحل:

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & : 0 \le x < 1 \\ 1 & : 1 \le x < 2 \\ 2 & : 2 \le x < 3 \\ 3 & : x = 3 \end{cases} \quad : m \le x < m+1 : \lfloor x \rfloor = m$$

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 & : 0 < x \le 1 \\ 2 & : 1 < x \le 2 \\ 3 & : 2 < x \le 3 \end{cases} \quad : m < x \le m+1 \; : \; \lceil x \rceil = m+1$$







$$\int_0^3 [x]\, d\lfloor x \rfloor = f(0).g_0 + f(1).g_1 + f(2).g_2 + f(3).g_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

تعميم: k_n حيث

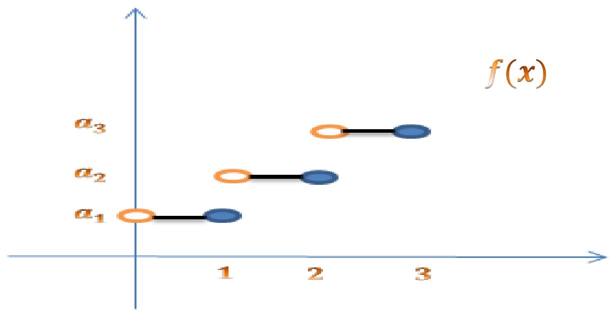
$$k_n = \int_0^n [x]\, d\lfloor x \rfloor = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و الأن لنبرهن أن

$$\exists f(x): \int_0^n f(x) d[x] = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

نلاحظ أن الدالة $[x]$ مستمرة من اليمين عند ... ... ,1,2,3 و غير مستمرة من اليسار عند نفس النقط

بينما الدالة $f(x)$ مستمرة من اليسار عند .. .. ,1,2,3 و غير مستمرة من اليمين عند نفس النقط



$$\int_0^n f(x)d[x] = f(1).1 + f(2).1 + f(3).1 + \cdots + f(n).1$$

$$\int_0^n f(x)d[x] = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

التأويل الهندسي لتكامل استيلجس:

الغاية منه هي تحويل تكامل استيلجس الى تكامل ريمان وفق شروط معينة:

نحن نعلم اذا كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ و كانت g قابلة للاشتقاق و g' موجودة و محدودا على المجال $[a,b]$ و كمول على نفس المجال فإن تكامل استيلجس يكون موجود و معينا بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f(x)\ dg = (R)\int_a^b f\ .\ g'dx$$

في هذه الحالة نستطيع تحويل تكامل استيلجس الى ريمان بسهولة

و لكن اذا لم يكن g قابل للاشتقاق سنقوم ببناء الدالة $\psi(\mathrm{t})$ التي تحقق

$$\int_a^b f\ dg = \int_a^b \psi(x)dx$$

أي أن خلاصة التأويل هي تحويل تكامل استيلجس لتكامل ريمان ليسهل علينا ايجاد السطح الذي نريد حساب مساحته أو المنحني الجديد $\psi(\mathrm{x})$ الذي نريد حساب تكامله

إن التابع المولد (التأويل) صعب الإيجاد كلما كانت الدلة أكثر تعقيدا و قد ذكر الدكتور نايف الطلي أن المثال الذي أورده هو من أبسط الأمثلة التي يمكننا تأويله (توليد تابع $\psi(\mathrm{x})$).

مثال: ليكن لدينا التابع المعرف وسيطيا

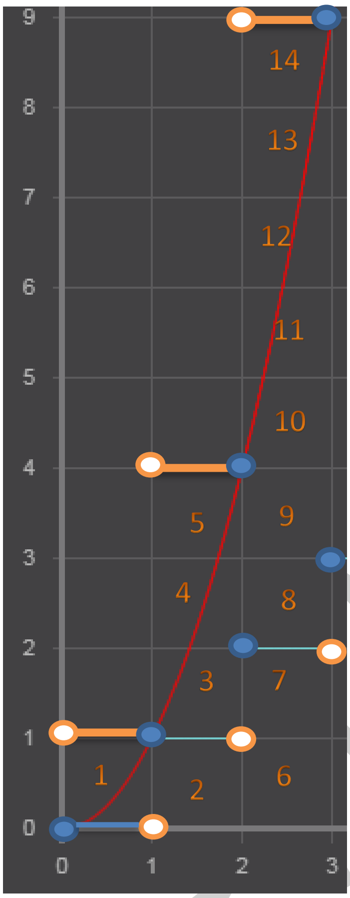
$$x = g(t)\,, \qquad y = f(t)$$

حيث $x = g(t) = [t]$ و $y = f(t) = t^2$ حيث $t \in [0,3]$

أحسب $\int_0^3 t^2\, d[t]$ ثم أوجد الدالة $\psi(\mathrm{t})$ التي تحقق:

$$\int_0^3 t^2\, d[t] = \int_0^3 \psi(t)dt$$

الحل:



نلاحظ أن $f(t)$ تابع مستمر على $[a,b]$ و g تابع متزايد على $[a,b]$ أي تكامل استيلجس موجود و منه

$$\int_0^3 t^2\, d[t] = f(1).g_1 + f(2).g_2 + f(3).g_3 = 1.1 + 4.1 + 9.1 = 14$$

الأن لنبني الدالة $\psi(\mathrm{t})$ (يهمنا نقاط الانقطاع و بداية و نهاية المجال)

$$t = 0 \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0,0)$$

نقطة انقطاع $t = 1 \begin{cases} g(1-0) = 0\,, f(1) = 1 \to (0,1) \\ g(1+0) = 1\,, f(1) = 1 \to (1,1) \end{cases}$

نقطة انقطاع $t = 2 \begin{cases} g(2-0) = 1\,,\ f(2) = 4 \to (1,4) \\ g(2+0) = 2\,,\ f(2) = 4 \to (2,4) \end{cases}$

نقطة انقطاع $t = 3 \begin{cases} g(3-0) = 2\,, f(3) = 9 \to (2,9) \\ g(3) = 3\ ,\ f(3) = 9 \to (3,9) \end{cases}$

الأن نصل بين هذه النقاط الناتجة بقطع مستقيمة موازية ل ox و ذلك من أجل جميع القفزات للدالة فنحصل على الشكل المجاور و المساحة موضحة بعدد المربعات المرقمة ☺

حيث $\psi(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 : & t=0 \\ 1 : & 0<t\leq 1 \\ 4 : & 1<t\leq 2 \\ 9 : & 2<t\leq 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 0 : & 0\leq t<1 \\ 1 : & 1\leq t<2 \\ 2 : & 2\leq t<3 \\ 3 : & t=3 \end{cases}$

$$\int_0^3 \psi(x)dt = \int_0^1 1\, dt + \int_1^2 4\, dt + \int_2^3 9\, dt = [t]_0^1 + [4t]_1^2 + [9t]_2^3 = 14$$

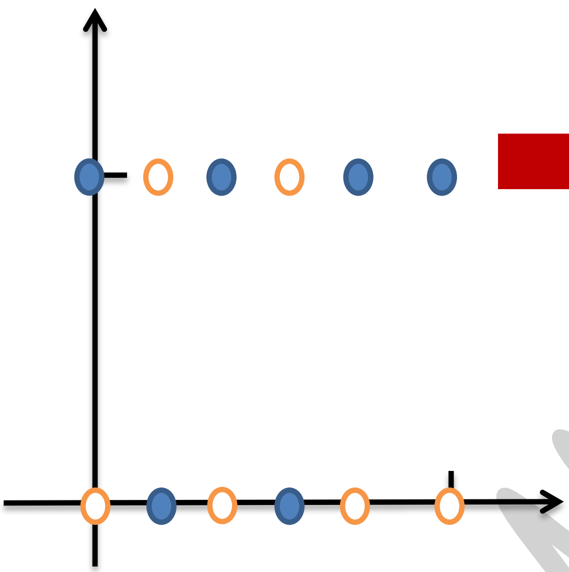
نلاحظ أن هذه النتيجة تكافئ حساب مساحات المربعات الموضحة بالشكل و التي طول كل ضلع منها يساوي 1 ومنه كل مربع مساحته يساوي 1 و لدينا 14 مربع أي أن مساحة السطح $s = 14$ و أن $\psi(x)$

مثال:

برهن أن الدالة f المعرفة و المحدودة على $[0,1]$ كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

غير كمولة على $[0,1]$



الحل:

كون الدالة $f(x)$ محدودة فرضا فإنها تحقق:

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$$

لنرسم الدالة طبعا الرسمة ستكون رسمة تقريبية لأنه يوجد عدد غير منته من الأعداد العادية و غير العادية داخل المجال $[0,1]$

نقول عن الدالة أنها كمولة اذا كانت معرفة و محدودة و استطيع ايجاد العدد الثابت $A \in \mathbb{R}$ الذي يحقق

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k = \int_0^1 f\,dx$$

حيث $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ و $\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ و $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$

تنويه: إذا كانت A لها قيمة وحيدة فإن الدالة تكون كمولة أما إذا وجدنا أكثر من قيمة ل A فتكون الدالة غير كمولة

الأن لنأخذ التجزئة P حيث

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1\}$$

نميز حالتين:

الأولى: $t_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(t_k) = 1 \Rightarrow A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} [x_k - x_{k-1}]$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}]$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [x_n - x_0] = \lim_{\Delta x \to 0} [1 - 0] = 1$$

الثانية: $t_k \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(t_k) = 0 \Rightarrow A = 0$

نلاحظ من الحالة الأولى و الثانية أن ل A قيمتين و منه فإن f غير كمول على المجال $[0,1]$ بالنسبة لريمان

مثال:

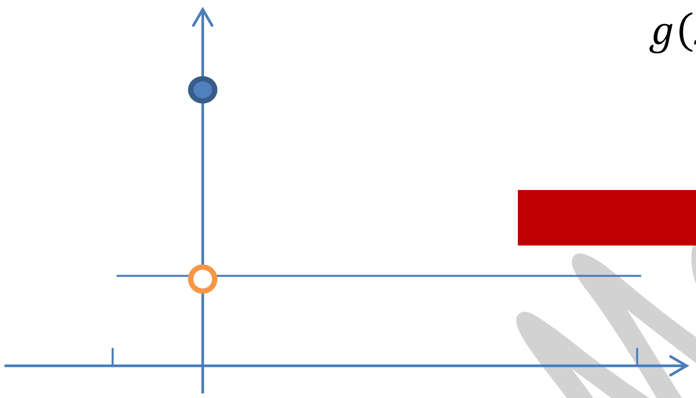
برهن أن تكامل استيلجس المعطى بالشكل $\int_{-1}^{5} f\, dg$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \neq 0 \\ 3 & : x = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ -2 & : x = 0 \end{cases}$$

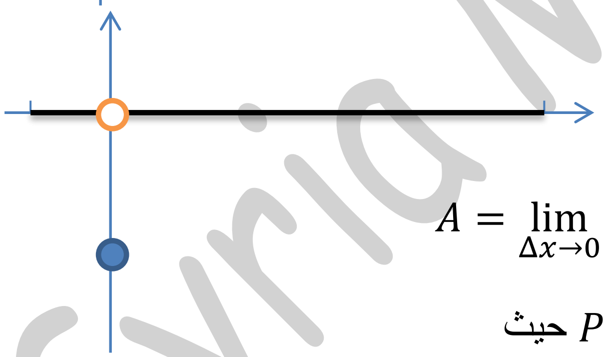
غير كمول على المجال $[-1,5]$

الحل:

نرسم الدالة f



نرسم الدالة g



الأن لنحسب A حيث:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta g_k$$

حيث $\Delta g_k = [g(x_k) - g(x_{k-1})]$ و لنأخذ التجزئة P حيث

$$P = \{x_0 = -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i = 0 < x_{i+1} < \cdots < x_n = 5\}$$

و الأن لنحسب A

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} f(t_1).[g(x_1) - g(x_0)] + f(t_2)[g(x_2) - g(x_1)] + \cdots +$$
$$f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + f(t_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \cdots +$$
$$f(t_n)[g(x_n) - g(x_{n-1})]$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [-2f(t_i) + 2f(t_{i+1})]$$

نميز حالتين

$$1)\ t_i = 0 \Rightarrow A = [-2(3) + 2(1)] = -4$$

$$2)\quad t_i \neq 0 \Rightarrow A = [-2(1) + 2(1)] = 0$$

و إن $-4 \neq 0$ و منه فإن f غير كمولة

احسب التكاملين:

$$1)\ \int_0^3 [x]d[x]$$

$$2)\ \int_0^3 [x]d[x]$$

الحل:

لقد قمنا بحل مفصل ل (1) سابقا (في هذه المحاضرة الصفحة 3)

و بنفس الطريقة نحل (2) بالاستفادة من رسمة الدوال في الصفحة الثالثة

$$\int_0^3 [x]d[x] = f(0).\,g_0 + f(1).\,g_1 + f(2)g_2 + f(3).\,g_3$$

نقوم بحساب g_k حيث $0 \leq k \leq 3$

$$g_0 = g(0+0) - g(0) = 1 - 0 = 1$$
$$g_1 = g(1+0) - g(1-0) = 2 - 1 = 1$$
$$g_2 = g(2+0) - g(2-0) = 3 - 2 = 1$$
$$g_3 = g(3) - g(3-0) = 3 - 3 = 0$$

$$\int_0^3 \lfloor x \rfloor d\lceil x \rceil = 0.1 + 1.1 + 2.1 + 3.0 = 3$$

أو يمكن حساب هذا التكامل عن طريق الاستفادة من الخاصية التاسعة لتكامل استيلجس في المحاضرة سابقة

نظرية التكامل بالتجزئة:

اذا كان احدا التكاملين $\int_a^b f \ \ dg$ و $\int_a^b g \ \ df$ موجودا فإن الأخر يكون موجودا و يحقق: $\int_a^b f \ \ dg \ + \ \int_a^b g \ \ df = [f(x).g(x)]_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a)$

أي أن كون $\int_0^3 \lceil x \rceil d \lfloor x \rfloor$ فإن $\int_0^3 \lfloor x \rfloor d \lceil x \rceil$ موجود و يحقق

$$\int_0^3 \lceil x \rceil d \lfloor x \rfloor + \int_0^3 \lfloor x \rfloor d \lceil x \rceil = [\lceil x \rceil . \lfloor x \rfloor]_0^3$$

$$6 + \int_0^3 \lfloor x \rfloor d \lceil x \rceil = 9 \Rightarrow \int_0^3 \lfloor x \rfloor d \lceil x \rceil = 9 - 6 = 3$$

تمرين وظيفة:

أوجد الدالة $\psi(t)$ التي تحقق : ((تأويل هندسي))

$$\int_0^3 t \ d\lfloor t \rfloor = \int_0^3 \psi(t) dt$$

الحل:

$$x(t) = g(t) = [t] = \lfloor t \rfloor$$

$$y(t) = f(t) = t \quad \text{حيث} \quad t \in [0,3]$$

الأن نقوم بإيجاد نقاط الجديدة ((المؤولة)):

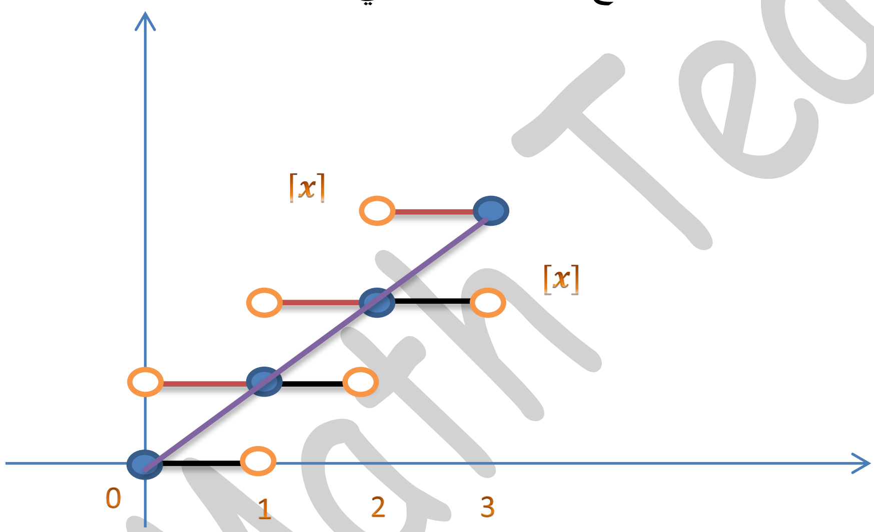
$$t = 0 \begin{cases} g(0) = 0 \, , & f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \\ g(0+0) = 0 \ \, , & f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$$t=1\begin{cases}g(1+0)=1\,, & f(1)=1\Rightarrow(1,1)\\ g(1-0)=0\,, & f(1)=1\Rightarrow(1,0)\end{cases}$$

$$t=2\begin{cases}g(2+0)=2\,, & f(2)=2\Rightarrow(2,2)\\ g(2-0)=1\,, & f(2)=2\Rightarrow(2,1)\end{cases}$$

$$t=3\begin{cases}g(3)=3\,, & f(3)=3\Rightarrow(3,3)\\ g(3-0)=2\,, & f(3)=3\Rightarrow(3,2)\end{cases}$$

نقوم بوصل النقاط الناتجة و منه ينتج لدينا الشكل الاتي:



نلاحظ أن $\psi(x)=[x]$ و أيضا أن $\int_0^3 t\,d[t]=\int_0^3[t]\,dt$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي * ياسين الحلبي * شهد الحايك البوشي