◀ دكتور المادة: أحمد هايل

◀ المحاضرة: الرابعة عشر   عنوان المحاضرة: التراص في الفضاءات المترية

المحتوى : ١- مبرهنة تربط الاستمرار بالتراص .

٢- تمرين صورة اللصاقة تحوي لصاقة الصورة .

٣- تمارين عامة (قطر مجموعة – النقطة الداخلية) .

مبرهنة: ليكن $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ تابع مستمر ، وبفرض أن $A\subseteq X$ مجموعة متراصة في X فإن $f(A)$ متراصة في Y .

البرهان: لتكن $\{\theta_i : i\in I\}$ تغطية مفتوحة للمجموعة $f(A)$ أي :

$$f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}\left(\bigcup\theta_i\right)\Leftarrow f(A)\subseteq\bigcup_{i\in I}\theta_i$$

كما أن : $A\subseteq f^{-1}\left(f(A)\right)\Rightarrow A\subseteq f^{-1}(\cup\theta_i)=\cup f^{-1}(\theta_i)$

$$\Rightarrow A\subseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}(\theta_i)$$

ولدينا f مستمر وحسب مبرهنة سابقة فإن المجموعات $\{f^{-1}(\theta_i): i\in I\}$ مفتوحة . إذا هي تغطية مفتوحة لـ A .

لكن A متراصة إذا توجد تغطية جزئية منهية معها بحيث

$$A\subseteq f^{-1}(\theta_{i_1})\cup\dots\cup f^{-1}(\theta_{i_n})$$

$$=f\left(f^{-1}(\theta_{i_1})\right)\cup\dots\cup f\left(f^{-1}(\theta_{i_n})\right)$$

$$f(A)\subseteq\theta_{i_1}\cup\dots\cup\theta_{i_n}\Rightarrow$$

$\{\theta_{i_1}\dots\theta_{i_n}\}$ تغطية جزئية منتهية لـ $f(A)$ ومنه $f(A)$ متراصة .

$\forall E\subseteq X;E\subseteq f^{-1}(f(E))$

$\forall E\subseteq X;f(f^{-1}(E))\subseteq E$

تمرين : ليكن $f\,;(X\,,d) \longrightarrow (Y\,,\rho\,)$ تابع مستمر

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, A \subseteq X\,; f\big(\overline{A}\big) \subseteq \overline{f(A)}$$

الحـــل

" $\Leftarrow$ " ليكن f مستمر و $A \subseteq X$ ولتكن $x \in \overline{A}$

ولنبرهن أن $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$x \in \overline{A}$ أي هي نقطة ملاصقة لـ A $\Leftarrow$ يوجد $\{x_n\}$ متتالية من عناصر A حيث $x_n \longrightarrow x$ ، وحسب مبرهنة سابقة وبما أن f مستمر فإن $f\,(x_n) \longrightarrow f(x)$

إذا لدينا متتالية $\{f(x_n)\}$ من عناصر $f(A)$ متقاربة من $f(x)$ فأصبحت $f(x)$ نقطة ملاصقة لـ $f(A)$

$$\Rightarrow f\,(x) \in \overline{f(A)} \Rightarrow f\big(\overline{A}\big) \subseteq \overline{f(A)}$$

" $\Rightarrow$ " بفرض أن $\forall\, A \subseteq X\,; f\,(\overline{A}\,) \subseteq \overline{f(A)}$

لنبرهن أن f مستمر بالاعتماد على المبرهنة :

((f مستمر $\Leftrightarrow$ ان الصورة العكسية لكل مغلقة في X هي مغلقة في Y))

لتكن $Y \supseteq B$ مغلقة في Y وليكن $A = f^{-1}\,(B)$

$$\Rightarrow f\,\Big(\overline{f^{-1}\,(B)}\Big) = f\,\big(\overline{A}\big) \subseteq \overline{f(A)} \;= \overline{f(f^{-1}(B))} \;\subseteq\; \underbrace{\overline{B} = B}_{\text{لأن } B \text{ مغلقة}}$$

$$\Rightarrow f\,\Big(\overline{f^{-1}(B)}\Big) \subseteq B \;\;\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$$

((المجموعة محتواة في لصاقتها))

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$$

مجموعة تساوي لصاقتها في مغلقة .

وبالاعتماد على المبرهنة التي ذكرناها فإن f مستمرة .

تمرين : ليكن $(Y,\rho)\longrightarrow(X,d)\,; f$ تابع مستمر و $A\subseteq X$ مجموعة متراصة فإن : $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$

الحـــل

إن $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ لأن f مستمر حسب التمرين السابق .

لدينا A متراصة في $X \implies f(A)$ متراصة في Y ومنه $f(A)$ مغلقة إذا :

$$f(\overline{A})\subseteq \overline{f(A)}=f(A)\subseteq f(\overline{A})$$

تمرين : أثبت أن $\delta(A)=\delta(\overline{A})$

الحـــل

لدينا $\delta(A)\le\delta(\overline{A}) \impliedby A\subseteq\overline{A}$ ، ولنبرهن أن $\delta(\overline{A})=\delta(A)$

ليكن $x,y\subseteq\overline{A}$ نقطتين ملاصقتين لـ A

$$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\,;N\left(x,{}^{\varepsilon}/_{2}\right)\cap A\ne\emptyset$$

$$N(y,{}^{\varepsilon}/_{2})\cap A\ne\emptyset$$

$$\delta(A)=\sup d(x,y)\ ;\ x,y\in A$$

وليكن $a\in A\cap N\left(x,{}^{\varepsilon}/_{2}\right)$

$$b\in A\cap N(y,{}^{\varepsilon}/_{2})$$

$$\Rightarrow a,b\in A\quad ,a\in N\left(x,{}^{\varepsilon}/_{2}\right)$$

$$b\in N(y,{}^{\varepsilon}/_{2})$$

$$\Rightarrow a,b\in A\quad ,d(x,a)<{}^{\varepsilon}/_{2}$$

$$d(y,b) < \varepsilon/2$$

ولدينا $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$

$$< \varepsilon/2 + d(a,b) + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow d(x,y) < d(a,b) + \varepsilon \leq \delta(A) + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow d(x,y) < \delta(A)$$

$$\Rightarrow sup\ d(x,y) \leq \delta(A) \quad ; x,y \in \overline{A}$$

$$\Rightarrow \delta\left(\overline{A}\right) \leq \delta(A)$$

$$\Rightarrow \delta\left(\overline{A}\right) = \delta(A)$$

تمرين : هات مثال على أن $\overset{\circ}{\overline{A}} \neq \overline{A^\circ}$

الحــل

لتكن $A = Q$ في $(\mathcal{R}, |,|)$ حيث $Q^\circ = \emptyset$ مجموعة النقاط الداخلية في Q

Q لا تحوي اي نقطة داخلية لأنه بفرض $q \in Q$ نقطة داخلية فإنه يوجد $\varepsilon > 0$

بحيث $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[= N(q,\varepsilon) \subseteq Q$

ليكن $\sqrt{2} \notin Q$ مهما يكن ε صغيرا فيوجد n كبير كفاية بحيث $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$

$$\Rightarrow q-\varepsilon < q < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < q+\varepsilon$$

وجدنا عنصر $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ حيث :

$$Q \not\ni q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in]q-\varepsilon, q+\varepsilon[$$

وهذا مستحيل إذا $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\nsubseteq Q$

$$\Rightarrow Q^\circ = \emptyset \qquad , \overline{Q^\circ} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

كما أن $\overline{Q} = \mathcal{R}$ لأن :

بفرض أن $x \in \mathbb{R}$ يمكن إيجاد متتالية من عناصر Q مثل q_n بحيث

$$q_n \longrightarrow x \quad \text{إذا :} \quad x < q_n < x + \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow lim_{n\to\infty} q_n = x \quad \Longrightarrow x \in \overline{Q} \Longrightarrow \mathcal{R} \subseteq \overline{Q} \ , \ \overline{Q} \subseteq \mathcal{R}$$

$$\Longrightarrow \overline{Q} = \mathcal{R}$$

اصبح لدينا $\overset{\circ}{\overline{Q}} = \overset{\circ}{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \Longleftarrow \overline{Q^{\circ}} = \emptyset \ \overline{Q}^{\circ} = \mathcal{R} \subsetneq$

$$\overset{\circ}{\overline{Q}} = \mathcal{R} \subsetneq \overline{Q^{\circ}} = \emptyset \Longleftarrow \overset{\circ}{\overline{Q}} = \overset{\circ}{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$$

مثال : لتكن $A =]0,1[$ نجد أن $\overline{A^{\circ}} \subsetneq \overset{\circ}{\overline{A}}$

مثال آخر : في الفضاء المتري المتقطع (X , δ) حيث

$$\delta(x,y)\begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

نجد أن $A \subseteq X \ ; \ \overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{A^{\circ}}$

وظيفة : ليكن (X, d) فضاء متري حيث X متراص $\Leftrightarrow$ إذا كانت $\{F_i \ ; i \in I\}$ جماعة ما من المغلفات في X بحيث ((تقاطع اي عدد منته من مجموعات غير خالي فإن تقاطعها كلها غير خالي))

انتهت المحاضرة

تصحيح غلط في المحاضرة ١١

الصفحة الأولى / السطر العاشر

الخطأ: $\Longrightarrow \boldsymbol{f(x_n) \in f\big(N(x < \delta)\big) \subseteq f(w) \subseteq f(V)} \subseteq V \Rightarrow f(x_n) \in V = N(f(x), \varepsilon)$

الصح: $\Longrightarrow \boldsymbol{f(x_n) \in f\big(N(x < \delta)\big) \subseteq f(w) \subseteq f(U)} \subseteq V \Rightarrow f(x_n) \in V = N(f(x), \varepsilon)$

إعداد: ناريمان جلو * آية اليافي * هالة مصطفى