نظري

◄ دكتورة المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: المنحني العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تمرين تكامل .

2-المنحني العقدي + أمثلة .

تمرين : أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}dt$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}dt = \left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i0}\right] = \frac{1}{i}[i-1] = 1+i$$

المنحني العقدي :

المنحني العقدي الموجه Γ هو مجموعة المواضع المرتبة التي تمسحها قيمة $\delta(t)$ ل تابع عقدياً δ مستمر على مجال مغلق $[a,b]$ عندما تمسح t مجال $[a,b]$ من a الى b

أي Γ هو مسار $\delta(t)$ الموجه عندما تمسح t مجال مغلق $[a,b]$ من a الى b

$$\delta \;:\; [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \delta(t)$$

نسمي التابع δ تمثيلاً وسيطياً لـ Γ كما نسمي المتحول t وسيطاً يمثل δ ونقول إن المنحني Γ موجه وفق تزايد قيم الوسيط t ، و نسمي $\delta(a)$ بداية المنحني و $\delta(b)$ نهاية المنحني واذا كانت

$\delta(b) = \delta(a)$ نقول عن منحني Γ مغلق و إلا نقول عن المنحني أنه مفتوح .

نوه الدكتور : إذا تعاملنا مع تابع و لم يُذكر أنه متعدد القيم فهو وحيد القيمة إلا اذا كان معروف مسبقاً كالتابع Log .

- نقول عن نقطة z من مستوٍ عقدي إنها نقطة من المنحني Γ إذا كان Γ يمر من z إذا وفقط إذا وجد قيمة للوسيط t واحدة على الأقل في مجال $[a,b]$ بحيث تكون $z=\delta(t)$

ليكن عدد قيم الوسيط $t\in[a,b]$ ومحققة للمساواة $z=\delta(t)$ مساوياً ل m عندئذ :

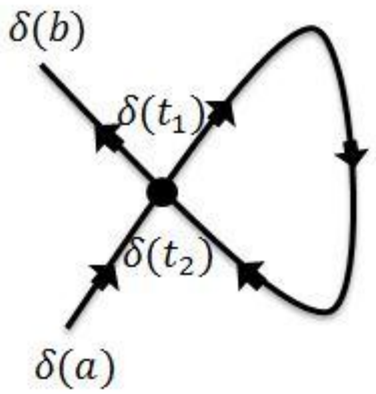
1- $m=0$ أي المنحني لا يمر من z .

2- $m=1$ نقول أن النقطة z بسيطة للمنحني

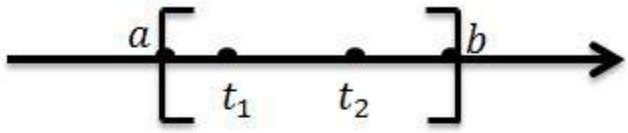
3- $m\geq 2$ نقول عن النقطة z مضاعفة من المرتبة m هذا يعني مرور المنحني Γ من z عدداً من المرات مساوياً ل m .

<u>(نقصد هنا انه يمكن ان يمر المنحني من النقطة مرة او مرتين او اكثر وذلك من أجل t مختلفة)</u>

<u>مثال :</u>



- z مضاعفة من المرتبة الثانية



ملاحظة : عدد مرات المرور نسميها مرتبة تضاعف النقطة واذا كانت مرتبة التضاعف للنقطة z مساوياً ل m فأننا نعتبر هذا النقطة عدداً من النقاط المختلفة مساوياً ل m .

- نسمي المجموعة $\delta([a,b])$ بالمجموعة النقطية للتابع δ .

ملاحظة : قولنا عن منحنٍ عقدي إنه مجموعة جزئية من مجموعة ما فهذا يعني أن $\gamma([a,b])$ محتواة في تلك المجموعة

إذا كان $\delta(t) = x(t) + iy(t)$ فأننا نسمي المعادلتين $x = x(t) \ , \ y = y(t)$ معادلتين وسيطيتين ((تمثيلاً وسيطياً للمنحني Γ))وللحصول على المعادلة الديكارتية لحامل منحني نحذف الوسيط t من المعادلتين الوسيطيتين .

أمثلة عما سبق

1) ليكن $\delta \ : \ [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ حيث $\delta(t) = e^{it}$ هل يمكن لهذا التابع أن يكون ممثل للمنحني .

الحل :

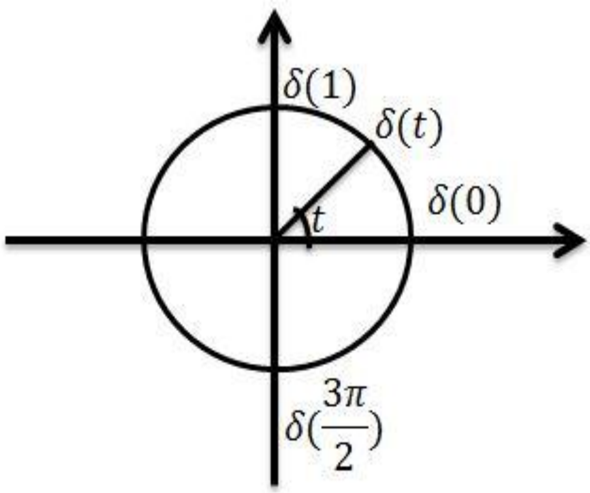
لكي يكون ممثل منحني يجب ان يكون مستمر على مجال مغلق

إن التابع مستمر على $[0,2\pi]$ لأن e^{it} مستمر على $\mathbb{R}$ فهو يمثل تمثيلاً وسيطياً لمنحنٍ ولنعين هذا المنحني

$$\forall t \in [0,2\pi] \ \ : \ \ |\delta(t)| = |e^{it}| = 1$$

وهذا يعني $\delta(t)$ تقع على دائرة الواحدة .(لأن طويلة δ هي الواحد). إن أمثال i هي زاوية للعدد $\delta(t)$ بما أن وسيط t يمثل زاوية للعدد $\delta(t)$ ستمسح دائرة الوحدة مرة واحدة بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة).

$\delta(0) = 1$ بداية المنحني (هو عبارة عن عدد عقدي زاويته هي صفر).
$\delta(2\pi) = 1$ نهاية المنحني .



ومنه يكون المنحني مغلق . **ونرمز لدائرة الواحدة**

الممسوحة مرة واحدة ب اتجاه موجب بالرمز

$\boldsymbol{C^+(0,1)}$

إذاً المنحني هو $C^+(0,1)$ وجميع نقاطه

بسيطة باستثناء نقطة البداية المنطبقة على نقطة النهاية

وهي نقطة مضاعفة من المرتبة الثانية .

2) $0 \leq t \leq 4\pi \qquad : \qquad \delta_1(t) = e^{it}$

الحل :

بنفس الأسلوب نستطيع إثبات أن منحني ممثل $\delta_1(t)$ هو دائرة الواحدة ممسوحة مرتين ب اتجاه موجب انطلاقاً من الواحد .

إن جميع نقاط هذا المنحني هي مضاعفة مرتين باستثناء نقطة البداية فهي مضاعفة ثلاث مرات .

ملاحظة : ***على رغم من أن المجموعة النقطية لكل من δ_1, δ هي ذاتها وهي دائرة الواحدة الا أن المنحني الممثل بـ δ مختلف عن المنحني الممثل بـ δ_1 لذلك نقول إن δ_1 هو تمثيل وسيطي غير ممسوح به لـ $C^+[0,1]$.***

3) $0 \leq t \leq 2\pi \quad : \quad \delta_2(t) = e^{-it}$

الحل :

حامل ممثل δ_2 هو دائرة الواحدة لأن

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad : \quad |\delta_2(t)| = |e^{it}| = 1$$

وبما ان $-t$ هي زاوية $\delta_2(t)$ فإن $\delta_2(t)$ ستمسح دائرة الوحدة مرة واحدة بالاتجاه السالب (مع عقارب الساعة) انطلاقاً من الواحدة ونرمز للدائرة الواحدة باتجاه سالب بالرمز $C^-[0,1]$

4) $0 \leq t \leq \pi \quad : \quad \delta_3(t) = e^{it}$

الحل :

حامل ممثل δ_3 هو دائرة الواحدة لان

$$\forall t \in [0,\pi] \quad : \quad |\delta_3(t)| = |e^{it}| = 1$$

وبما أن t زاوية $\delta_3(t)$ فإن $\delta_3(t)$ ستمسح نصف دائرة الواحدة العلوي ممسوح مرة احدة انطلاقاً من الواحد الى النقطة -1

$$\delta_3(\pi) = -1$$

ملاحظة : المنحني المفتوح يكون من نقطة والى نقطة .أما المنحني المغلق يكون إما بالاتجاه الموجب أو السالب .

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – احمد أبو النوت – نذير تيناوي