نظري

◄ دكتور المادة: غصون الجيرودي

◄ المحاضرة: الحادية عشر   عنوان المحاضرة: سلاسل ماركوف

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في المحاضرة الحادية عشر من مقررنا الرياضيات المتقطعة وسنتناول في هذه المحاضرة سلاسل ماركوف .

لتكن لدينا مجموعة من الحالات $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ **في حال سلاسل ماركوف** احتمال الانتقال من حالة إلى حالة يعتمد على الحالة السابقة مباشرة فقط ولايعتمد على باقي الحالات .

أي أنه إذا كان بالحالة $(n+1)$ سنعتمد على الحالة (n) .

لحل مسألة بالاعتماد على سلاسل ماركوف نعرف مايلي:

أولاً:نحدد **الحالات** وليكن $s = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضاء الحالات .

ثانياً:نحدد **الاحتمالات** وليكن p_{ij}^k احتمال الانتقال من حالة i إلى الحالة j إذا كان k القرار المتخذ .

ثالثاً: r_i^k **الدخل** علما أننا في المرحلة i و k القرار المتخذ .

رابعاً: v_i^n **هوتوقع** أفضل دخل في حال كنا في المرحلة i وذلك في الفترة n .

v_i^0 **هو التوقع الأفضل في الحالة الابتدائية (الأمثل) .**

مسألة :

صالة عرض تتسع في نهاية **كل فترة على ثلاث سيارات**

خلال الفترة: **الكلفة للبدء في التصنيع** هي 40مليون

كلفة تصنيع السيارة الواحدة هي 10 مليون

كلفة عرض السيارة هي 10 مليون

في كل فترة الطلبية(يجب أن تحقق) إما سيارة واحدة أو سيارتين .

في الفترة النهائية تباع السيارة ب 5 مليون **المطلوب:**

1-حدد الاستراتيجية المثلى لتحقيق توقع الكلفة الأصغرية من أجل n فترة .

2-أوجد الاستراتيجية المثلى من أجل فترتين بحيث لدينا إبتدائياً سيارة واحدة في صالة العرض .

الحل:

أولا : نحدد الحالات :عدد السيارات الموجودة بصالة العرض :$S = \{0,1,2,3\}$

ثانيا: نحدد الاحتمالات :ولتحديدها يجب تحديد القرارات $\{k\}$

إن k_i **هو القرار المتخذ** :وهو عدد السيارات المراد تصنيعها في الحالة i بشرط أن :

1-عدد السيارات في نهاية الفترة يجب أن يكون 3 على الأكثر

2-الطلبية يجب أن تحقق إما أن تباع سيارة أو تباع سيارتان

$$k_i = \{k \quad ; \max\{0,2-i\} \le k \le 3-i+1 \quad ; i \in S\}$$

كيفية تحديد القرارات k_i :

k هو عدد السيارات المراد تصنيعها ولدينا في الحالة i في صالة العرض i سيارة فيكون إجمالي السيارات الموجودة هو :$k+i$

$k+i$ محصورة في المجالات :

1- أقل عدد سيارات ستكون موجودة في صالة العرض 2 سيارة(حسب الطلبية الاكثر لضمان تحققها) أي أن $2 \le k+i$

2- أكثر عدد سيارات موجودة في صالة العرض يجب أن تكون 3 سيارات(المكان المتسع)+ 1سيارة(الطلبية الاقل)

$$k+i \le 4$$

(أكبر عدد لتصنع السيارات هي 4 لأنه من الممكن أن تكون الطلبية سيارة واحدة حيث سيبقي ثلاث سيارات ولو اخترنا 5 وكانت الطلبية سيارة واحدة فإنه سيبقى 4سيارات ولا تتسع في صالة العرض)

ومنه :

$$2 \le k + i \le 4$$

$$Max\{0,2-i\} \le k \le 4-i$$

أخذنا Max كون عدد السيارات عدد موجب .

الاحتمالات هي :p_{ij}^{k}

في الفترة i لدينا i سيارة و k سيارة مصنعة $k + i =$

بالانتقال للفترة j احتمال أن تكون الطلبية سيارة ومنه $j = k + i - 1$ عدد السيارات

بالانتقال للفترة j احتمال أن تكون الطلبية سيارتين ومنه $j = k + i - 2$ عدد السيارات

وبالتالي :

p_{ij}^{k} هو احتمال أن يكون لدينا i سيارة وأصبح لدي j سيارة علما أننا انتجنا k سيارة هي :

$$p_{ij}^{k} = \begin{cases} 0.5 & ; j = k + i - 1 \\ 0.5 & ; j = k + i - 2 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ثالثا:الدخل (الكلفة): كلفة البدء بالتصنيع +كلفة تصنيع السيارة +كلفة العرض

$$c_i^k = \begin{cases} \overbrace{40 + 10k}^{\text{كلفة التصنيع}} \overbrace{+ 0.5 \times (i + k - 1) \times 10 + 0.5 \times (i + k - 2) \times 10}^{\text{كلفة العرض بعد تحقق الطلبية}} & ; k > 0 \\ 0 \qquad + 0.5 \times (i - 1) \times 10 + 0.5 \times (i - 2) ; & k = 0 \end{cases}$$

رابعاً:حساب v_i^n وهو توقع أصفر كلفة في حال لدينا i سيارة وذلك في n فترة ومنه:

$$\boldsymbol{v_i^n = \underbrace{Min}_{max\{0,2-i\} \le k \le 4-i} \{c_i^k + \sum_j p_{ij}^k . v_i^n\}}$$

$$v_i^n = \underbrace{Min}_{ma\{0,2-i\} \le k \le 4-i} \{c_i^k + 0.5 v_{i+k-1}^{n-1} + 0.5 v_{i+k-2}^{n-1}\} \quad : n \ge 1$$

$$\boldsymbol{v_i^0 = -5 \times i}$$

في الفترة النهائية عدد السيارات التي لم تعرض تباع ب5مليون وبالتالي نقصت من الكلفة 5مليون مضروبة بعدد السيارات المتبقية .

2-إيجاد الاستراتيجية المثلى من أجل فترتين $(n=2)$ في حالة لدينا سيارة واحدة في المعرض

$(i=1)$ إذن المطلوب إيجاد $v_1^2=?$

$$v_1^2=\underbrace{Min}_{ma\{0,2-i)\le k\le 4-i}\{c_1^k+0.5v_{i+k-1}^{2-1}+0.5v_{i+k-2}^{2-1}\}$$

$$v_1^2=\underbrace{Min}_{ma\{0,2-i)\le k\le 4-i}\{\overbrace{c_1^1+0.5v_1^1+0.5v_0^1}^{K=1},\ \overbrace{c_1^2+0.5v_2^1+0.5v_1^1}^{K=2},\ \overbrace{c_1^3+0.5v_3^1+0.5v_2^1}^{K=3}\}$$

$$v_1^2=Min\{55+0.5v_1^1+0.5v_0^1,\quad 75+0.5v_2^1+0.5v_1^1,95+0.5v_3^1+0.5v_2^1\}$$

بحيث:

$$c_1^1=40+10\times 1+10\times 0.5+0=55$$

$$c_1^2=40+10\times 2+0.5(3-1)\times 10+0.5(3-2)\times 10=75$$

$$c_1^3=40+10\times 3+0.5(4-1)\times 10+0.5(4-2)\times 10=95$$

نقوم بحساب v_1^1,v_0^1,v_2^1,v_3^1

$$v_1^1=\underbrace{Min}_{max\{0,2-i\}k\le 4-i}\{c_1^k+0.5v_{i+k-1}^0+0.5v_{i+k-2}^0\}$$

$$v_1^1=\underbrace{Min}_{1\le k\le 3}\{c_1^1+0.5v_1^0+0.5v_0^0,c_1^2+0.5v_2^0+0.5v_1^0,c_1^3+0.5v_3^0+0.5v_2^0\}$$

$$v_1^1=Min\{55+0.5(-5),75+0.5(-5\times 2-5\times 1),95+0.5(-5\times 3-5\times 2)\}$$

$$=Min\{52.5\ ,67.5\ ,82.5\}=52.5$$

إذن أفضل استراتيجية أن تنتج سيارة واحدة $k=1$

$$v_0^1=\underbrace{Min}_{max\{0,2-i\}\le k\le 4-i}\{c_0^k+0.5v_{0+k-1}^0+0.5v_{0+k-2}^0\}$$

$$v_0^1 = \underbrace{Min}_{2\le k\le 4}\{c_0^2 + 0.5v_1^0 + 0.5v_1^0, c_0^2 + 0.5v_2^0 + 0.5v_2^0, c_0^4 + 0.5v_3^0 + 0.5v_2^0\}$$

$$v_0^1 = Min\{65 + 0.5(-5), 85 + 0.5(-5\times 2 - 5), 105 + 0.5(-5\times 3 - 5\times 2)\}$$

$$= Min\{62.5,77.5,92.5\} = 62.5$$ القرار $k = 2$ أن ينتج سيارتين

$$\boldsymbol{v_2^1} = \underbrace{Min}_{max\{0,2-i\}\le k\le 4-i}\{c_2^k + 0.5v_{2+k-1}^0 + 0.5v_{2+k-2}^0\}$$

$$v_2^1 = \underbrace{Min}_{0\le k\le 2}\{c_2^0 + 0.5v_1^0 + 0.5v_0^0, c_2^1 + 0.5v_2^0 + 0.5v_1^0, c_2^2 + 0.5v_3^0 + 0.5v_2^0\}$$

$$\boldsymbol{v_2^1} = Min\{45 + 0.5(-5), 65 + 0.5(-5\times 2 - 5), 85 + 0.5(-5\times 3 - 5\times 2)\}$$

$= Min\{42.5,57.5,72.5\} = 42.5; k = 0$ القرار

$$\boldsymbol{v_3^1} = \underbrace{Min}_{max\{0,2-i\}\le k\le 4-i}\{c_3^k + 0.5v_{3+k-1}^0 + 0.5v_{3+k-2}^0\}$$

$$v_3^1 = \underbrace{Min}_{0\le k\le 1}\{c_3^0 + 0.5v_2^0 + 0.5v_1^0, c_3^1 + 0.5v_3^0 + 0.5v_2^0\}$$

$$v_3^1 = Min\{55 + 0.5(-5\times 2 - 5), 75 + 0.5(-5\times 3 - 5\times 2)\}$$

$$= Min\{47.5,62.5\} = 47.5$$ القرار $k = 0$

نعوض في $\boldsymbol{v_1^2}$:

$$v_1^2 = Min\{55 + 0.5v_1^1 + 0.5v_0^1, 75 + 0.5v_2^1 + 0.5v_1^1, 95 + 0.5v_3^1 + 0.5v_2^1\}$$

$$v_1^2 = Min\{55 + 0.5(52.5 + 62.5), 75 + 0.5(42.5 + 52.5), 95 + 0.5(47.5 + 42.5)\}$$

$= Min\{112.5,122.5و140\} = \mathbf{112.5} \quad \Rightarrow \quad k = 1$

ومنه الاستراتيجية المثلى لتحقيق توقع أقل كلفة :

وهي أن تقوم بإنتاج سيارة واحدة في الفترة الأولى ومن ثم :

إذا كانت الطلبية سيارة واحدة تقوم بإنتاج سيارة واحدة في الفترة الثانية .

وإذا كانت الطلبية سيارتين تقوم بإنتاج سيارتين في الفترة الثانية

ويكون توقع الكلفة الصغرى :112.5

$v_1^2 = 112.5$

في الفترة الأولى : القرار هو إنتاج سيارة واحدة k=1

الطلبية تحققت

إما سيارة واحدة

في الفترة الثانية $v_1^1 = 52.5$

القرار k=1 إنتاج سيارة واحدة

أو سيارتين

في الفترة الثانية $v_0^1 = 62.5$

القرار هو k=2 إنتاج سيارتين

إعداد :سماح علوان * سندس درويش *نذير تيناوي