2018-4-4

نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄المحاضرة: الرابعة عنوان المحاضرة: الرؤوس المفصلية

بسم الله وبالله المستعان.........سنتعرف أصدقائي في هذ المحاضرة عن الرؤوس المفصلية والجسور والبيان الجزوء " ذو الجزئين " ومبرهنتين الرؤوس المفصلية .

الرؤوس المفصلية نقول عن الرأس v من رؤوس البيان البسيط G أنه رأس مفصلي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$k(G - v) > k(G)$$

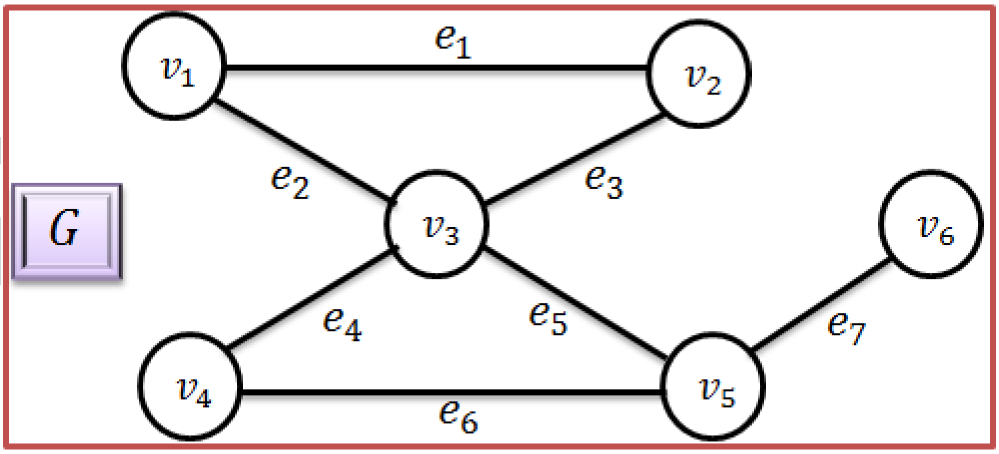
أي أن >> عدد مركبات البيان $G - v$ أكبر من عدد مركبات البيان G <<

الجسور نقول عن الضلع e من أضلاع البيان G أنه جسراً إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$k(G - e) > k(G) = 1$$

بمعنى آخر : الجسر هو عبارة عن ضلع إذا حذفناه نحصل على بيان غير مترابط

مثال (1) : ليكن لدينا البيان البسيط G المعطى بالشكل :



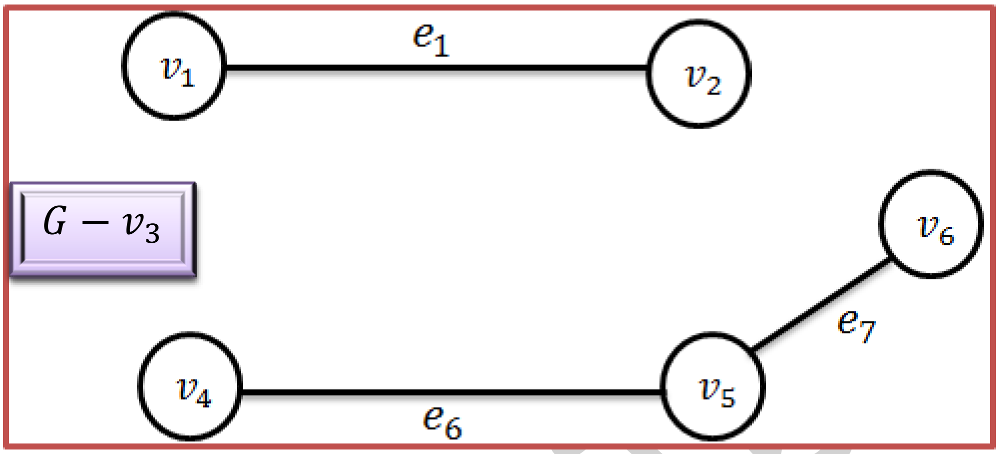
المطلوب : حدد الرؤوس المفصلية والجسور في البيان البسيط G المعطى .

الحل

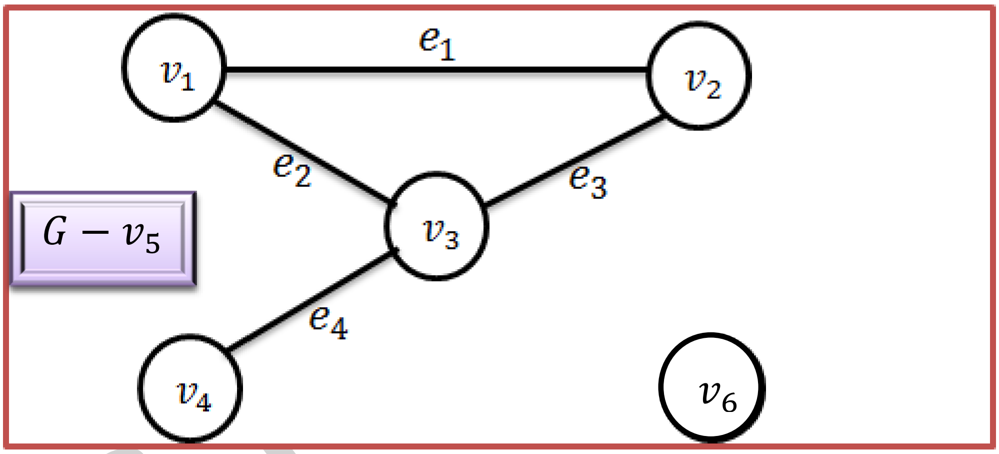
لإيجاد الرؤوس المفصلية علينا إيجاد رؤوس من البيان G تَقسِم G إلى أكثر من مركبة بحيث تصبح

$$k(G - v) > k(G)$$

الرؤوس المفصلية هي v_3, v_5 لأن عند حذفهم سيصبح البيان G مركبتين وبالرسم يتضح الأمر



$$2 > 1 \Leftarrow k(G - v_3) > k(G)$$

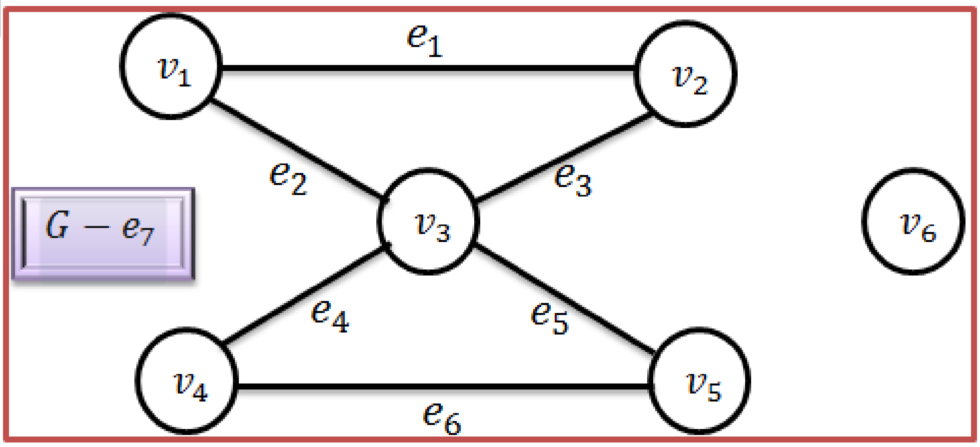


$$2 > 1 \Leftarrow k(G - v_5) > k(G)$$

كيفية إيجاد الجسور

لإيجاد الجسور في البيان G علينا إيجاد أضلاع من البيان G إذا قمنا بحذفها فإنها تَقسِم G لأكثر من مركبة عندها نقول عن الضلع أنه جسراً .

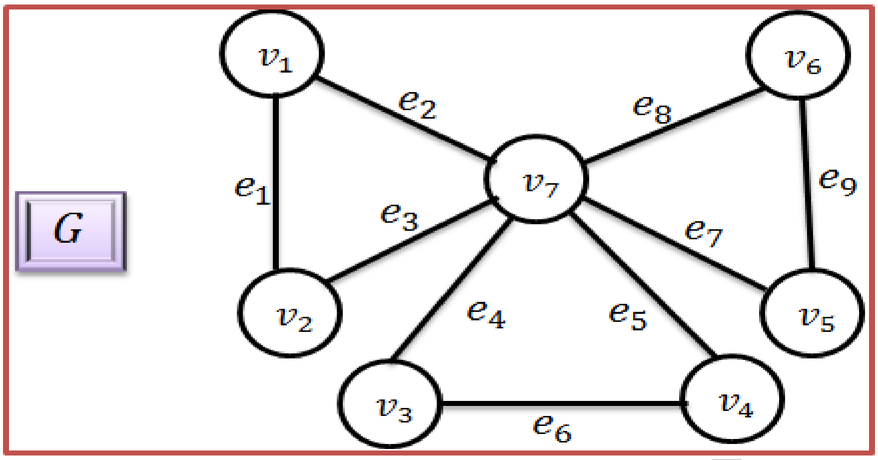
كما في المثال السابق البيان البسيط G نجد فيه أن الضلع $e_7 = v_5v_6$ هو جسراً



لأن

$$2 > 1 \Leftarrow k(G - v_5v_6\ ) > k(G)$$

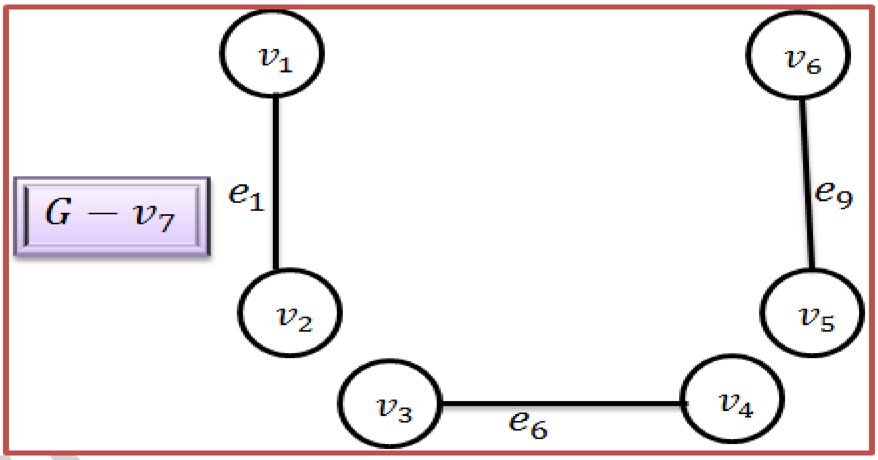
مثال (2) : ليكن لدينا البيان البسيط G المعطى بالشكل :



المطلوب : أوجد الرؤوس المفصلية والجسور .

الحل

الرأس المفصلي هو v_7 لأننا عندما نحذف سيصبح البيان G ثلاث مركبات



$$3 > 1 \Leftarrow k(G - v_7\ ) > k(G)$$

ولكن في البيان البسيط G المعطى لا يوجد أضلاع تمثل جسور لأن جميع الأضلاع تقع على الدائرة .

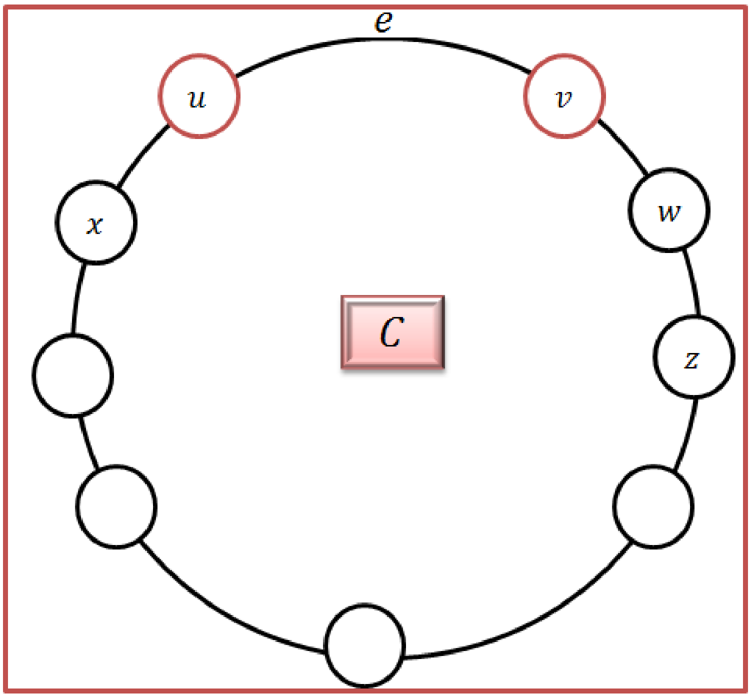
نظرية : ليكن البيان $G = (V, E)$ بيان بسيط ومترابط و $e \in E$ إن الضلع e هو جسراً إذا وفقط إذا كان الضلع e لا يقع في حلقة .

البرهان

نريد برهان أن الضلع e جسراً أي $k(G - e) > k(G)$ إذا وفقط إذا كانت e لا تقع على أي حلقة .

ليكن e جسراً في البيان G ولنفرض جدلاً أن $e = uv$ تقع على حلقة C

$$C : u, v, w, \dots \dots z, x, u$$



((لا ننسى أن w يلي v و x تسبق u))

علينا إثبات أن $G - e$ بيان مترابط
بعد حذف الضلع e من البيان G إن $G - e$
يحوي المسار $u - v$ وهو $u, x, \dots \dots, z, w, v$
لنختار u_1, v_1 رأسين في البيان $G - e$
وبما أن u_1, v_1 رأسين في G و G مترابط .
إذاً يوجد مسار $u_1 - v_1$ في G ولنرمز له بـ P .

ولنميز حالتين :

1) $e = uv$ لا يقع في P ومنه المسار P يقع في $G - e$

2) $e = uv$ يقع في P لدينا شكلين

إما $u_1, u_2 \dots \dots u, v, \dots \dots v_1$ أو $u_1, u_2 \dots \dots v, u, \dots \dots v_1$

عندئذٍ في الحالة الأولى يكون لدينا المسار التالي :

$$P : u_1, \dots \dots u, x, \dots \dots w, v, \dots \dots v_1$$

وفي الحالة الثانية يكون لدينا المسار التالي :

$$P : u_1, \dots \dots v, w, \dots \dots x, u, \dots \dots v_1$$

ومنه $k(G - e) = k(G) = 1$ وهذا يعني أن البيان $G - e$ مترابط وهذا تناقض لأن e جسراً في G ومنه e لا يقع على حلقة

($\Longrightarrow$) بفرض أن $e = uv$ ضلع لا يقع على أي حلقة ولنثبت أن e جسراً في G ومنه إن $G - e$ لا يملك مسار $u - v$ لأننا لو فرضنا جدلاً أنه يملك مسار $u - v$ لكان البيان $G - e$ مترابط

وهذا تناقض لأن e لا يقع على أي حلقة حسب الفرض

إذاً $G - e$ لا يملك مسار $u - v$ ومنه $G - e$ غير مترابط إذاً $k(G - e) > k(G)$ ومنه $k(G - e) > 1$ إذا e جسراً في G

البيانات الخاصة

البيان التام : ليكن لدينا البيان $G = (V, E)$ نقول عن البيان G أنه تام إذا تحقق ما يلي :

$$\forall\, x, y \in V \ : \ \exists e = (x, y) \in E$$

أي يوجد ضلع بين أي عقدتين من البيان ((كل رأسين متصلين بضلع))

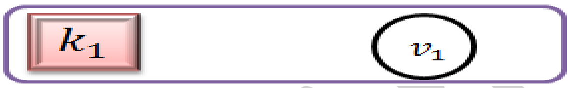
إذا كان p هي مرتبة G (($|V| = p$)) عندئذٍ $|E| = q = \frac{p(p-1)}{2}$ ونرمز للبيان التام بـ k_p

بحيث : $|V| = p$ هي قدرة الرؤوس و $|E| = q$ هي قدرة الأضلاع .

ملاحظة : البيان التام هو بيان منتظم .

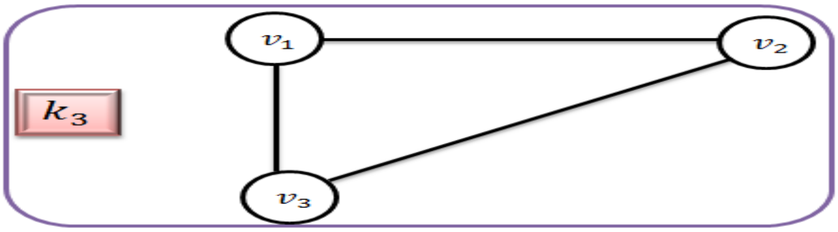
أمثلة

k_1 يمثل رأس واحد " بيان تافه "

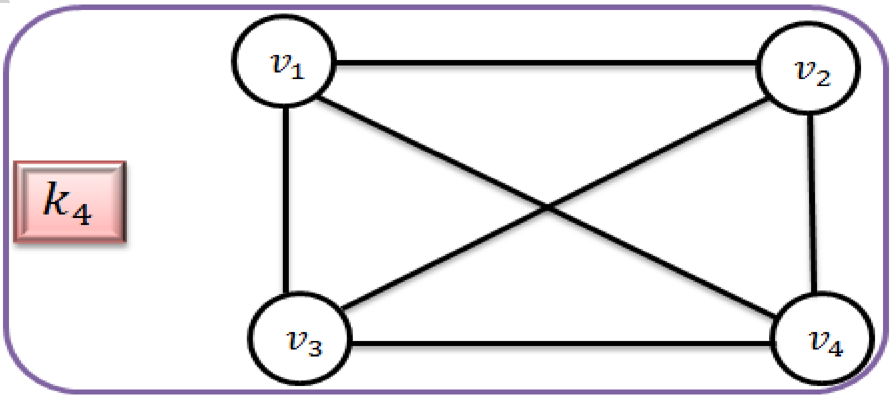


k_2 بيان تام فيه رأسين متصلين بضلع واحد أي : $q = 1 \ , \ p = 2$

k_3 بيان تام فيه كل رأسين متصلين أي : $q = 3 \ , \ p = 3$



k_4 بيان تام فيه كل رأسين متصلين أي : $q = 6 \ , \ p = 4$



أمثلة

P_1

P_2 المسار الذي مرتبته 2 هو فردي لأنه يحوي على ضلع واحد .

المسار P الذي مرتبته n نرمز له بـ P_n .

نقول عن المسار أنه فردي أو زوجي حسب عدد أضلاعه $q = |E|$

نقول عن الحلقة C_n أنها فردية أو زوجية حسب عدد الأضلاع أو العقد إذا كان فردي أو زوجي .

البيان الجزوء " ثنائي التجزئة "

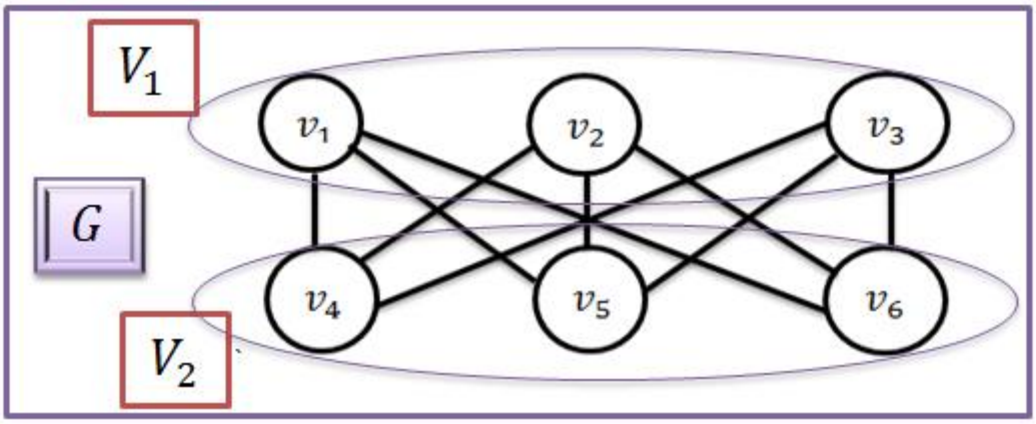
نقول عن البيان G أنه بيان ذو جزئيين إذا أمكن تجزئة V إلى مجموعتين غير خاليتين V_1, V_2 بحيث

$$V = V_1 \cup V_2 \qquad , \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

وإذا كان $uv \in E$ بحيث

إما $v \in V_2 \quad \wedge \quad u \in V_1$ أو $v \in V_1 \quad \wedge \quad u \in V_2$

مثال : ليكن لدينا البيان التام G المعطى بالشكل :



هل البيان G جزوء ؟

الحل

حتى يكون G جزوء يجب تحقق الشرطين :

$$V = V_1 \cup V_2 \qquad , \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

أي $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\} \quad , \quad V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ومنه نختار العقد غير المشتركة بالأضلاع .

ومنه $k_{3,3}$ جُزِء إلى جزئيين ، ويعني هذا الرمز بأن البيان تام فيه مجموعتين كل مجموعة يوجد فيها ثلاث رؤوس وكل رأس يتصل فيه ثلاث رؤوس .

نظرية : الشرط اللازم والكافي كي يكون البيان غير التافه G ذو جزئيين (ثنائي التجزئة) إذا وفقط إذا كان G لا يحوي على حلقات فردية .

البرهان

G بيان ذو جزئيين $\Leftrightarrow$ يحوي حلقات زوجية .
ليكن G بيان ذو جزئيين ولنثبت أنه لا يحتوي على حلقات فردية
عندئذٍ يمكن تجزئة V إلى مجموعتين V_1, V_2 بحيث تحقق الشروط في التعريف وبفرض G يحتوي على حلقة ولتكن :

$$C_n : v_1, v_2, \dots \dots v_n, v_1$$

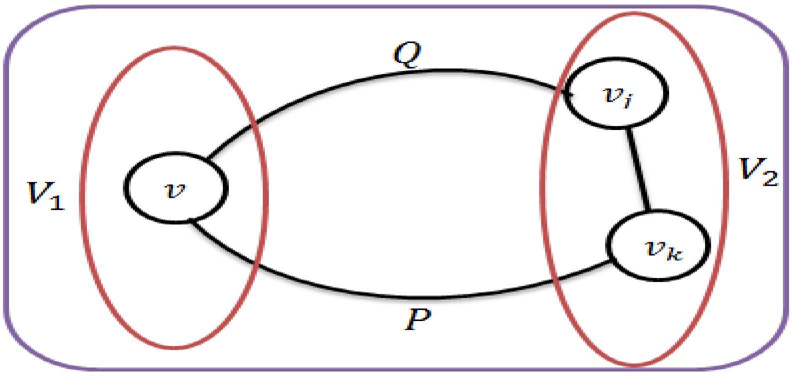
نريد إثبات أن G لا يحتوي حلقات فردية إذاً نثبت أن الحلقة زوجية أي n زوجي .
وذلك حسب خاصة الحلقة " نقول عن الحلقة أنها زوجية أو فردية حسب عدد الأضلاع "
بفرض $v_1 \in V_1$ وبما أن $v_1v_2 \in E$ وإن G ذو جزئيين ومنه $v_2 \in V_2$ وبما أن $v_2v_3 \in E$
فإن $v_2 \in V_2$ و $v_3 \in V_1$ ومنه نستطيع القول أن جميع الرؤوس ذات الأدلة الزوجية في V_2 والفردية في V_1 ، وبما أن $v_nv_1 \in E$ ضلع فإن $v_n \in V_2$ و $v_1 \in V_1$
ومنه n عدد زوجي وبالتالي الحلقة زوجية ((تم المطلوب)) .

$(\Longrightarrow)$ بفرض أن G لا يحتوي على حلقات فردية علينا إثبات أن G ثنائي التجزئة

نفرض حالتين :

الحالة الأولى : G مترابط ولنأخذ v رأس من رؤوس G وبما أن G مترابط عندئذٍ يوجد مسار $v - v_1$ من أجل كل v_1 في G (ليس بالضرورة أن يكون المسار وحيد) نحاول تجزئة البيان إلى مجموعتين V_1, V_2 نعرف V_1 هي مجموعة مؤلفة من v وجميع الرؤوس v_1 التي تحقق أن المسار $v - v_1$ ذو الأقصر طول زوجي عندئذ $V_2 = V - V_1$

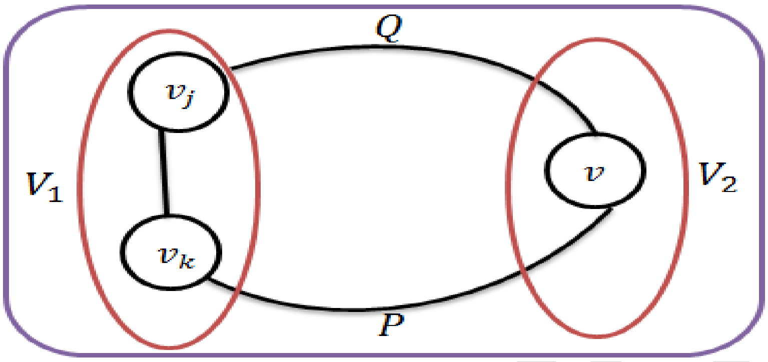
ونفرض e ضلع يصل الرأسين v_k و v_j في G وإذا فرضنا v_j, v_k تقع في V_2



عندئذ حسب التعريف لـ V_1, V_2 يوجد مسار $v - v_j$ ذو المسار الأقصر طول فردي ويوجد مسار $v - v_k$ ذو الأقصر طول فردي .
بحيث P مسار فردي + Q مسار فردي + الضلع $e = v_jv_k$ يساوي حلقة فردية وبالتالي حصلنا

على طريق مغلق فردي وكل طريق مغلق فردي يحوي مسار مغلق فردي إذا وفقط إذا كانت الحلقة فردية "سوف يتم برهانها "

وهذا تناقض مع الفرض إذاً G لا يحتوي على دوائر فردية وبالتالي G ثنائي التجزئة
وبفرض v_k, v_j تقع في V_1



بحيث P مسار زوجي + Q و مسار زوجي + الضلع $e = v_j v_k$ يساوي حلقة فردية وبالتالي حصلنا
عندئذٍ حسب التعريف V_1, V_2 يوجد مسار $v - v_j$ ذو أقصر طول زوجي ويوجد مسار $v - v_k$
ذو الأقصر طول زوجي ومنه حصلنا على طريق مغلق فردي
وكل طريق مغلق فردي يحوي مسار مغلق فردي ومنه يكون المسار حلقة فردية .
وهذا تناقض وبالتالي G ثنائية التجزئة في حال G مترابط .

الحالة ثانية : G غير مترابط

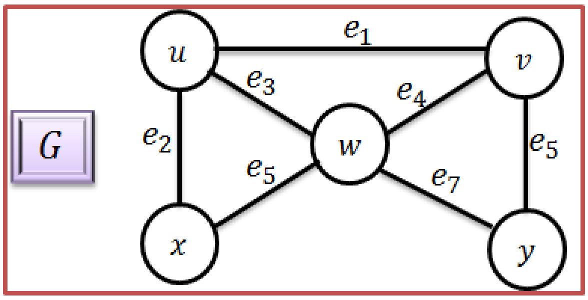
عندئذٍ هو مؤلف من عدة مركبات $G_1, G_2, \dots\dots, G_n$ أي $k(G) = n$
G_i بيان جزئي مترابط ولا يحوي على حلقة فردية لأن G لا يحوي على حلقات فردية ومنه كل G_i هو بيان ثنائي التجزئة .

ولتكن $V_i = U_i \cup W_i$ عندئذ G ثنائي التجزئة حيث

$$V = U \cup W \qquad ; U = \cup_{i=1}^{n} u_i \ \wedge \ W_i = \cup_{i=1}^{n} w_i$$

تصحيح رسمة في المحاضرة الثالثة

$W_1 : \ u, e_1, v, e_5, y, e_7, w, e_3, u, e_2, x$



إنتهت المحاضرة

إعداد: فطوم مرعي ** محمد علي فليون