# حل أسئلة الدورات

## أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧) :

**السؤال الأول:**

١- حدد نوع النقطة العادية والشاذة النظامية والشاذة غير النظامية للمعادلة التفاضلية التالية

$$(3x-5)^5y''+(3x-5)^4y'+(3x-5)^3y=0$$

٢- أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة: $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2=1$

**السؤال الثاني:** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$ في جوار النقطة $x_0=0$

**السؤال الثالث:** باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية $y''-9y=\sin t$

حيث $t>0$ $y'(0)-3$ ; $y(0)=1$

**السؤال الرابع:** أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t}$

حيث $u$ محدودة ، $0<x<3$ $u(0,t)=u(3,t)=0$

$$U(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x$$

**السؤال الخامس:**

أكتب هذه الجملة بالشكل التناظري وأوجد تكاملها العام :

$$(1)\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\quad ,\quad (2)\ \frac{dz}{dx}=\frac{xz}{y}$$

انتهت الأسئلة ☺

## أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧)

**السؤال الأول:**

١- حدد نوع النقطة العادية والشاذة النظامية والشاذة غير النظامية للمعادلة التفاضلية التالية

$$(3x-5)^5y''+(3x-5)^4y'+(3x-5)^3y=0$$

## الحل :

نقسم على $(3x-5)^5$

$$\Rightarrow y''+\frac{1}{(3x-5)}y'+\frac{1}{(3x-5)^2}y=0$$

$$p(x)=\frac{1}{(3x-5)}\quad , \qquad q(x)=\frac{1}{(3x-5)^2}$$

نلاحظ بأن جميع النقاط عادية باستثناء النقاط التي تعدم المقام ومنه $3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

ومنه $x_0=\frac{5}{3}$ نقطة شاذة لنحدد اذا كانت نظامية أو غير النظامية

$$P(x)=(x-x_0).p(x)$$

$$=\left(x-\frac{5}{3}\right).\frac{1}{(3x-5)}=1$$

ومنه $P(x)$ تحليلية عند النقطة $x_0=\frac{5}{3}$

$$Q(x)=(x-x_0)^2.q(x)$$

$$=\left(x-\frac{5}{3}\right)^2.\frac{1}{(3x-5)^2}=1$$

ومنه $Q(x)$ تحليلية عند النقطة $x_0=\frac{5}{3}$

ومنه بمأن $P(x)$ و $Q(x)$ تحليليتان عند النقطة $x_0=\frac{5}{3}$ ومنه النقطة شاذة نظامية

---

٢- أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة: $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2=1$

## الحــــــل:

نشتق المعادلة الأساسية بالنسبة لِـ$x$: $2(x-c_1)+2z.p=0 \qquad ; p=\frac{dz}{dx}$

$$\Rightarrow x-c_1=-zp\ \dots .(1)$$

نشتق المعادلة الأساسية بالنسبة لِـ $y$: $2(y-c_2)+2z.q=0 \qquad ; q=\frac{dz}{dy}$

$$\Rightarrow y-c_2=-zq\ \dots .(2)$$

نعوض 1 و 2 في المعادلة الأساسية:

$$(=-zp)^2+(-zq)^2+z^2=1$$

$$z^2p^2+z^2q^2+z^2=1$$

$$(p^2+q^2+1)z^2=1$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى وهي المعادلة المطلوبة

---

**السؤال الثاني:**

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$ في جوار النقطة $x_0=0$

## الحـــــــل:

$$(x^2-1)y''+3xy'+xy=0 \;.....(*)$$

نقسم المعادلة على $(x^2-1)$

$$y''+\frac{3x}{(x^2-1)}y'+\frac{x}{(x^2-1)}y=0$$

ومنه النقطة $x_0=0$ نقطة عادية ومنه شكل المتسلسلة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

نشتق :

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

نعوض $(y'',y',y)$ في المعادلة $(*)$

$$(x^2-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

نوحد قوى المتسلسلة:

في المتسلسلة 2 نبدل كل $n$ بـ $n+2$

في المتسلسلة 4 نبدل كل $n$ بـ $n-1$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0$$

نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلة

$$-2c_2-6c_3x+3c_1x+c_0x$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}+3nc_n+c_{n-1}]x^n=0$$

بالمطابقة نجد:

أمثال الثوابت :
$$-c_2 = 0 \Rightarrow \ c_2 = 0$$

أمثال $x$:
$$(-6c_3 + 3c_1 + c_0)x = 0 \Rightarrow -6c_3 + 3c_1 + c_0 = 0$$
$$6c_3 = 3c_1 + c_0$$
$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{6}c_0$$

أمثال $x^n$:
$$[n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1}]x^n = 0$$
$$n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1} = 0$$
$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = n(n-1)c_n + 3nc_n + c_{n-1}$$
$$c_{n+2} = \frac{(n^2+2n)c_n + c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad ;n \geq 2$$

$$n = 2 \Rightarrow \qquad c_4 = \frac{8c_2 + c_1}{12} = \frac{c_1}{12}$$
$$n = 3 \Rightarrow c_5 = \frac{15c_3 + c_2}{20} = \frac{3c_3}{4}$$

نعوض قيمة $c_3$
$$c_5 = \frac{3}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_0$$

يكفي إيجاد 5 او 6 حدود إذا لم نجدها تكتب بشكل قانون

ومنه بتعويض في شكل المتسلسلة $y$
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots . + c_nx^n$$
$$y = c_0 + c_1x + \left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{6}c_0\right)x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + \left(\frac{3}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_0\right)x^5 + \cdots.$$
وهو الحل العام للمعادلة.

---

**السؤال الثالث:**

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية $y'' - 9y = \sin t$

حيث $t > 0$ $\quad y(0) = 1 \ ; \quad y'(0) - 3$

**الحـــــل:**

نجري تحويلات لابلاس على المعادلة

$$L[y''] - 9L[y] = L[\sin t]$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) - 9Y(s) = \frac{1}{S^2+1}$$

نعوض الشروط: $y(0) = 1 \;\; ; \quad y'(0) - 3$

$$S^2Y(s) - S + 3 - 9Y(s) = \frac{1}{S^2+1}$$

$$(S^2-9)Y(s) = \frac{1}{S^2+1} + S - 3$$

$$(S^2-9)Y(s) = \frac{S^3-3S^2+S-3}{S^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{S^3-3S^2+S-3}{(S^2+1)(S-3)(S+3)} = \frac{A}{S-3} + \frac{B}{S+3} + \frac{CS+D}{S^2+1}$$

نوحد المقامات نجد

$$AS^3 + 3AS^2 + AS + 3A + BS^3 - 3BS^2 + BS - 3B + CS^2 - 9CS + DS^2 - 9D = S^3 - 3S^2 + S - 3$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$A + B + C = 1 \dots\dots (1)$$
$$3A - 3B + D = -3 \dots\dots (2)$$
$$A + B - 9C = 1 \dots\dots (3)$$
$$3A - 3B - 9D = -2 \dots\dots (4)$$

بطرح 3 من 1 نجد

$$10C = 0 \Rightarrow C = 0$$

بطرح 4 من 2 نجد

$$10D = -1 \Rightarrow D = -\frac{1}{10}$$

من المعادلة 1 نجد

$$A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B$$

نعوض في المعادلة 2 نجد

$$3(1-B) - 3B - \frac{1}{10} = -3$$

$$-6B = -6 + \frac{1}{10} \Rightarrow B = \frac{59}{60}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{59}{60} \Rightarrow A = \frac{1}{60}$$

بتعويض القيم

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{60}}{S-3} + \frac{\frac{59}{60}}{S+3} + \frac{-\frac{1}{10}}{S^2+1}$$

نجري تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{60}L^{-1}\left[\frac{1}{S-3}\right] + \frac{59}{60}L^{-1}\left[\frac{1}{S+3}\right] - \frac{1}{10}L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+1}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{60}e^{3t} + \frac{59}{60}e^{-3t} - \frac{1}{10}\sin t$$

---

**السؤال الرابع:** أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t}$

حيث $u$ محدودة ، $0 < x < 3$ $\quad u(0,t) = u(3,t) = 0$

$U(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$

**الحـــــل:**

$$U = X.T \ldots\ldots(*)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'.T \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = X''.T$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X.T'$$

نعوض في المعادلة نجد

$$X''.T = \frac{1}{h^2}X.T'$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{h^2}\frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

وهيي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

$$\xrightarrow{\text{وهي المعادلة المميزة}} \mu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\mu = \pm i\lambda$$

ومنه الحل العام للمعادلة $\quad X = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = -h^2.\lambda^2$$

$$\ln(T) = -h^2.\lambda^2 t + c_3'$$
$$T = c_3.e^{-h^2\lambda^2 t} \qquad ; c_3 = e^{c_3'}$$

نعوض $T$ و $X$ في المعادلة $(*)$

$$U = X.T$$
$$U = (c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x)(c_3.e^{-h^2\lambda^2 t})$$

$$U = c_1c_3 \cos\lambda x \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t} + c_2c_3 \sin\lambda x \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t}$$

$$U = c_4 \cos\lambda x \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t} + c_5 \sin\lambda x \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t}$$

الآن لنحسب الثوابت $\lambda$ و $c_4$ و $c_5$ من الشروط الابتدائية:

$$u(0,t) = c_4.e^{-h^2\lambda^2 t} + 0 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

من شرط الابتدائي الثاني

$$u(3,t) = \underbrace{c_4 \cos 3\lambda \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t}}_{\text{0 من الشرط الأول}} + c_5 \sin 3\lambda \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t} = 0$$

$$\Rightarrow u(3,t) = c_5 \sin 3\lambda \,.\, e^{-h^2\lambda^2 t} = 0$$

ومنه إما $c_5 = 0$ مستحيل لأننا لا نريد الحل الصفري

أو $e^{-h^2\lambda^2 t} = 0$ غير ممكن لأنه تابع أسي لا ينعدم

أو $\sin 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \sin 3\lambda = 0 \Rightarrow \sin 3\lambda = \sin n\pi$$
$$3\lambda = n\pi$$
$$\lambda = \frac{n\pi}{3}$$

نعوض

$$u(x,t) = c_5 \sin\frac{n\pi}{3}x \,.\, e^{-h^2\frac{n^2\pi^2}{9}t}$$

حسب مبدأ تركيب الحلول:

$$u(x,t) = c_6 \sin\frac{n_1\pi}{3}x \,.\, e^{-h^2\frac{n_1^2\pi^2}{9}t} + c_7 \sin\frac{n_2\pi}{3}x \,.\, e^{-h^2\frac{n_2^2\pi^2}{9}t} + c_8 \sin\frac{n_3\pi}{3}x \,.\, e^{-h^2\frac{n_3^2\pi^2}{9}t}$$

وبالمطابقة مع الشرط الابتدائي الثالث:

$$u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$$

$$\Longrightarrow u(x,0) = c_6 \sin\frac{n_1\pi}{3}x + c_7 \sin\frac{n_2\pi}{3}x + c_8 \sin\frac{n_3\pi}{3}x$$

بالمطابقة نجد:

$$c_6 = 5 \qquad c_7 = -3 \qquad c_8 = 2$$

$$\frac{n_1\pi}{3} = 4\pi \Longrightarrow n_1 = 12$$
$$\frac{n_2\pi}{3} = 8\pi \Longrightarrow n_2 = 24$$
$$\frac{n_3\pi}{3} = 10\pi \Longrightarrow n_3 = 30$$

ومنه نجد

$$u = 5\sin 4\pi x\,.\,e^{-h^2\frac{(12)^2\pi^2}{9}t} - 3\sin 8\pi x\,.\,e^{-h^2\frac{(24)^2\pi^2}{9}t} + 2\sin 10\pi x\,.\,e^{-h^2\frac{(30)^2\,\pi^2}{9}t}$$

وهو الحل المطلوب .

---

## السؤال الخامس:

أكتب هذه الجملة بالشكل التناظري وأوجد تكاملها العام :

$$(1)\,\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad , \qquad (2)\,\frac{dz}{dx} = \frac{xz}{y}$$

## الحـــــل:

سنردها إلى شكلها النظامي

$$\left.\begin{array}{l} 1 \Rightarrow -\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dx}{y} \\ 2 \Rightarrow \dfrac{dz}{xz} = \dfrac{dx}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{-\frac{dy}{x}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dx}{y}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{xz}}_{(3)}$$

$$1 = 2 \Longrightarrow -\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$$
$$y.\,dy + x.\,dx = 0$$
$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_1'$$
$$x^2 + y^2 = c_1 \qquad ; c_1 = 2c_1'$$
$$1 = 3 \Longrightarrow -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{xz}$$
$$\Rightarrow dy = -\frac{dz}{z}$$
$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} y = -\ln z + \ln c_2$$
$$e^y = \frac{c_2}{z} \Longrightarrow c_2 = z.\,e^y$$
$$\Rightarrow F(c_1, c_2) = 0$$
$$F(x^2 + y^2, z.\,e^y) = 0$$

وهو الحل المطلوب

## انتهى حل الدورة الفصلية الأولى ☺

## أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦-٢٠١٧) :

**السؤال الأول :** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(x^2-1)y''+2xy'-6y=0$$

**السؤال الثاني :** باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية :

$$y''-9y=t$$
$$y(0)=1\,,y'(0)=-3 \quad ; t>0$$

**السؤال الثالث :** أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية باستخدام فصل المتغيرات : $\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial y}$

حيث $z(0,y)=8e^{-3y}$

**السؤال الرابع :** أوجد الحل لمسألة القيم الحدية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x.y : u(0,y)=y^2 \,\&\&\, u(x,1)=\sin(x) \quad : u=u(x,y)$$

**السؤال الخامس:** أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين :

$$(z-y)^2\frac{dy}{dx}=z$$
$$(z-y)^2\frac{dz}{dx}=y$$

## حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦-٢٠١٧) :

**السؤال الأول :** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x^2-1)y''+2xy'-6y=0$ في جوار $x=0$

### الحل :

بتقسيم الطرفين على $(x^2-1)\neq 0$ نجد أن :

$$y'' + \frac{2x}{(x^2-1)} - \frac{6}{(x^2-1)}y = 0$$

فنلاحظ أن $q(x) = \frac{-6}{(x^2-1)}$ & $\mathrm{p}(x) = \frac{2x}{(x^2-1)}$ كل منهما تحليليتين عند الصفر ، فالصفر نقطة عادية للمعادلة المعطاة.

إن الحل العام للمعادلة السابقة من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1) x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة :

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^{n-1} - 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)x^{n} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^{n} - 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

الآن نوحد القوى بأن نبدل في المتسلسلة الثانية كل $n$ بـ $n+2$ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)x^{n} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^{n} - 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

نوحد الآن الحدود الدنيا :

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)x^{n} - 2c_2 - 6c_3 x - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n+2}\,(n+2)(n+1)x^{n} + 2c_1 x + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\, x^{n}$$
$$- 6c_0 - 6c_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0$$

نجمع حدود القوى المتساوية :

$$(-6c_0 - 2c_2) + (-4c_1 - 6c_3)\,x + \sum_{n=2}^{\infty}[(2n + n(n-1) - 6)c_n - (n+1)(n+2)c_{n+2}]x^n$$
$$= 0$$

بالمطابقة :

$$-6c_0 - 2c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -3c_0}$$

$$-6c_3 - 4c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = -\frac{2}{3}c_1}$$

$$[(2n + n(n-1) - 6)c_n - (n+1)(n+2)c_{n+2}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n+3)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_{n+2} = \frac{(n-2)(n+3)}{(n+1)(n+2)}c_n \quad : n \geq 2}$$

و هذه الأخيرة هي العلاقة التكرارية التي من خلالها نحسب ما يلي :

$$c_4 = \frac{0\,.5}{3.4}c_2 \Rightarrow \boxed{c_4 = 0}$$

$$c_5 = \frac{1.6}{4.5}c_3 = \frac{1\,.6\,.\left(-\frac{2}{3}c_1\right)}{4.5} \Rightarrow \boxed{c_5 = \frac{-c_1}{5}}$$

$$c_6 = \frac{2.7}{5.6}\underbrace{c_4}_{=0} \Rightarrow \boxed{c_6 = 0}$$

فنلاحظ أن الثوابت ذات الأدلة الزوجية بدءاً من $c_4$ كلها معدومة

نعوض في الحل العام :

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1x - 3c_0x^2 - \frac{2}{3}c_1x^3 + 0 - \frac{c_1}{5}x^5 + 0 + \cdots$$

$$y = c_0(1 - 3x^2) + c_1\left(x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right)$$

و هو المطلوب

**السؤال الثاني :** باستخدام تحويلات لابلاس أوجد الحل لمسألة القيم الابتدائية :

$$y'' - 9y = t$$
$$y(0) = 1\,, y'(0) = -3 \quad : t > 0$$

## الحل :

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة :

$$L[y''] - 9L[y] = L[t]$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 9Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 9)Y(s) - s + 3 = \frac{1}{s^2} \quad \text{(حسب شروط البدء)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s-3)(s+3)} + \frac{s-3}{(s-3)(s+3)} = \frac{1}{s^2(s-3)(s+3)} + \frac{1}{s+3}$$

لكن :

$$\frac{1}{s^2(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s+3}$$

بتوحيد المقامات و حذفها و المطابقة نجد أن :

$$A = 0\,, B = -\frac{1}{9}\,, C = \frac{1}{54}\,, D = -\frac{1}{54}$$

نعوض :

$$Y(s) = -\frac{\frac{1}{9}}{s^2} + \frac{\frac{1}{54}}{s-3} - \frac{\frac{1}{54}}{s+3} + \frac{1}{s+3}$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$L^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{54}L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \frac{1}{54}L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$

$$y(t) = -\frac{1}{9}t + \frac{1}{54}e^{3t} - \frac{1}{54}e^{-3t} + e^{-3t}$$

$$\boxed{y(t) == -\frac{1}{9}t + \frac{1}{54}e^{3t} + \frac{53}{54}e^{-3t}}$$

و هو المطلوب.

**السؤال الثالث :** أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية باستخدام فصل المتحولات :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial y}\quad : z(0,y)=8e^{-3y}$$

## الحل :

لنفرض أن الحل العام يكتب على شكل جداء تابعين كما يلي : $Z(x,y)=X(x)Y(y)$ عندئذٍ و بما أنها منفصل المتحولات يكون :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=X'(x)Y(y)\ ,\frac{\partial z}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

نعوض في المعادلة :

$$X'(x)Y(y)=4X(x)Y'(y)$$
$$\frac{X'}{4X}=\frac{Y'}{Y}=\lambda$$

بـأخذ النسبة الأولى مع الثالثة :

$$\frac{X'}{X}=4\lambda\Rightarrow lnX=4\lambda x+lnC_1\Rightarrow \boxed{X=C_1e^{4\lambda x}=C_1e^{c_1'x}\quad : c_1'=4\lambda}$$

بأخذ الثانية مع الثالثة :

$$\frac{Y'}{Y}=\lambda\Rightarrow lnY=\lambda y+lnC_2\Rightarrow \boxed{Y=C_2e^{\lambda y}=C_2e^{c_2'y}\quad : c_2'=\lambda}$$

و بالتالي يكون الحل العام :

$$Z=XY=\left(C_1e^{c_1'x}\right)\left(C_2e^{c_2'y}\right)=Ce^{c_1'x+c_2'y}\quad : C=C_1C_2$$

السؤال الرابع : أوجد الحل لمسألة القيم الحدية :

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=xy: u(0,y)=y^2\ \&\&\ u(x,1)=sin(x)\quad : u=u(x,y)$$

## الحل :

لإيجاد التابع $u$ علينا بالمكاملة مرتين مرة بالنسبة ل $x$ ومرة بالنسبة ل $y$

نكامل بالنسبة ل $x$ : $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{2}y+\varphi(y) : (\varphi(y))$ تابع يحوي $y$

تكامل بالنسبة ل $y$ : $u=\frac{x^2}{2}.\frac{y^2}{2}+\varphi_1(y)+p(x)$ ............ $(I)$

حيث $p(x),\varphi_1(y)$ دوال كيفية لإيجادها من الشروط الابتدائية :

$$u(0,y)=y^2\ \ ,\ \ y^2=\varphi_1(y)+p(0)\&\&$$

$$u(x,1)=sin(x)\xrightarrow{\text{نعوض في}(I)} sin(x)=\frac{x^2}{4}+\varphi_1(1)+p(x)$$

من الأولى: $y^2=\varphi_1(y)+p(0)\rightarrow\ \varphi_1(y)=y^2-p(0)$

من الثانية : $\sin(x)=\varphi_1(1)+p(x)\rightarrow p(x)=\sin(x)-\varphi_1(1)-\frac{x^2}{4}\rightarrow$

$$p(0)=\sin(0)-\varphi_1(1)-0=-\varphi_1(1)\xrightarrow{\text{نعوض}\ p(x)\ \text{و}\ \varphi_1(y)\ \text{في}\ u} u$$

$$=\frac{x^2y^2}{4}+y^2-\left(-\varphi_1(1)\right)+\sin(x)-\varphi_1(1)-\frac{x^2}{4}\rightarrow$$

$$u=\frac{x^2y^2}{4}+y^2+\sin(x)-\frac{x^2}{4}$$

**السؤال الخامس :** أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين :

$$\begin{cases}(z-y)^2.\frac{dy}{dx}=z\ \dots\dots\dots(1)\\ (z-y)^2.\frac{dz}{dx}=y\ \dots\dots\dots(2)\end{cases}$$

## الحل:

$$\text{من}(1)\Rightarrow\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}\ \&\&\ \text{من}(2)\Rightarrow\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dz}{y}\xrightarrow{\text{من}\ (1),(2)}$$

$$\underbrace{\frac{dx}{(z-y)^2}}_{\boxed{1}}=\underbrace{\frac{dy}{z}}_{\boxed{2}}=\underbrace{\frac{dz}{y}}_{\boxed{3}}$$

$$(2),(3)\ \text{من النسبتين}\Rightarrow ydy-zdz=0\Rightarrow \boldsymbol{y^2-z^2=c_1}$$

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy-dz}{z-y}\Rightarrow\frac{dx}{z-y}=d(y-z)=-d(z-y)\Rightarrow$$

$$dx+(z-y).d(z-y)=0\ \Rightarrow \boldsymbol{x+\frac{1}{2}(z-y)^2=c_2}$$

## أسئلة الدورة الإضافية ٢٠١٦ \ ٢٠١٧

**السؤال الأول (٣٠ درجة):**

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x = 0$

$$y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

**السؤال الثاني (٣٥ درجة):**

١- إيجاد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 + z^2 = 1$

٢- اوجد تحويل لابلاس العكسي التالي $L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+25)} + \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1}\right]$ ثم اوجد تحويل لابلاس التالي $L[e^{3t}\, sin4t]$

٣- اوجد الحل لمسالة القيمة الابتدائية التالية : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xe^t$ حيث الشروط الابتدائية هي

$$u(0,t) = t \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^t$$

**السؤال الثالث (٢٠ درجة):**

اوجد الحل التام للمعادلة بطريقة شارب : $(z + qy)^2 . p = 0$

**السؤال الرابع (١٥ درجة):** اوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية

$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = (x^2 - y^2)z$ والمار بالمستقيم المعين ب :

$$x + y = 0 \quad , \quad z = 1$$

**انتهت الأسئلة .. ^_^**

## حل أسئلة الدورة الإضافية للمعادلات التفاضلية ٢ :

**السؤال الأول :** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x = 0$

$$y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

**الحل :**

$x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية $(1)$ .

◄**تنويه:** دائما الحل الذي نبحث عنه يبدأ من الصفر.

١- نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

نوجد $y' , y''$ :

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض $y , y' , y''$ في المعادلة $(1)$ :

$$y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0 \Rightarrow y'' + xy' + x^2 y + 2y = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^n}_{2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}}_{3} + 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{4} = 0$$

في المتسلسلة $(1)$ نبدل كل $n$ ب $(n + 2)$

في المتسلسلة $(3)$ نبدل كل $n$ ب $(n - 2)$

كي يبقى $x^n$

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n-2=0}^{\infty} c_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n}_{1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n}_{2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n}_{3} + 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{4} = 0$$

- نوحد الحدود الدنيا:

ولتوحيد الحدود الدنيا، في المتسلسلة $(4),(1)$ نعوض $n=0$ ومن ثم نكتب المتسلسلة بدءاً من $n=1$ :

$$2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n+2c_0+2\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n=0$$

والآن في المتسلسلة $(4),(2),(1)$ نعوض $n=1$ وذلك لجعل كل المتسلسلات تبدأ من $n=2$ :

$$2c_2+6c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n$$

$$+2c_0\quad+2c_1x+2\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$2c_2+6c_3x+c_1x+2c_0+2c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+2)(n+1)c_{n+2}+nc_n+c_{n-2}+2c_n\}x^n=0$$

- للمطابقة:

$$\underbrace{\text{الحد الثابت}}_{=0}+\underbrace{(x\ \text{أمثال})}_{=0}.x+\underbrace{(x^2\ \text{أمثال})}_{=0}.x^2+\cdots+\underbrace{(n\ \text{أمثال})}_{=0}.x^n=0$$

- بالمطابقة نجد:

$$\text{الحد الثابت}=0\Rightarrow\underbrace{2c_2+2c_0}_{x_0\ \text{أمثال}}=0\Rightarrow c_2=-c_0$$

$$x\ \text{أمثال}=0\ \Rightarrow 6c_3+c_1+2c_1=6c_3+3c_1=0\Rightarrow c_3=-\frac{c_1}{2}$$

$$\{\text{منه نحصل على العلاقة التكرارية}\}\ x^n\ \text{أمثال}=0\ \Rightarrow(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_{n-2}+(n+2)c_n=0$$

$$\Rightarrow c_{n+2}=\frac{-(n+2)c_n-c_{n-2}}{(n+1)(n+2)}\ ;n\geq 2$$

- نوجد الثوابت:

$$n=2\Rightarrow c_4=\frac{-4c_2-c_0}{(3).(4)}=\frac{-4(-c_0)-c_0}{(3).(4)}=\frac{3c_0}{(3).(4)}=\frac{c_0}{4}\Rightarrow c_4=\frac{c_0}{4}$$

$$n=3\ \Rightarrow c_5=\frac{-5c_3-c_1}{(4).(5)}=\frac{-5\left(-\frac{c_1}{2}\right)-c_1}{(4).(5)}=\frac{3c_1}{2.4.5}=\frac{3c_1}{40}$$

$$\Rightarrow c_5=\frac{3c_1}{40}$$

- نعوض الثوابت بشكل الحل:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 - \frac{c_1}{2}x^3 + \frac{c_0}{4}x^4 + \frac{3c_1}{40}x^5 + \cdots + \cdots$$

فيكون الحل العام:

$$y = c_0 \underbrace{\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)}_{\text{حل خاص أول}} + c_1 \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{40} + \cdots\right)}_{\text{حل خاص ثاني}}$$

---

## السؤال الثاني:

**١- إيجاد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 + z^2 = 1$**

الحل:

- نشتق بالنسبة ل $x$

$$2(x - C_1) + 2zp = 0 : z = z(x,y) \ \&\& \ p = \frac{\partial z}{\partial x} \to (x - C_1) = -zp$$

لنوجد المشتق بالنسبة ل $y$

$$2(y - C_2) + 2zq = 0 \to (y - C_2) = -zq$$

نعوض المشتقات في المعادلة الأصلية ومنه :

$$(-zp)^2 + (-zq)^2 + z^2 = 1 \to z^2p^2 + z^2q^2 + z^2 = 1 \xRightarrow{\text{باخراج } z^2 \text{ عامل مشترك}}$$

$z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$ وهي المعادلة التفاضلية المرجوة

---

**٢- اوجد تحويل لابلاس العكسي التالي $L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+25)} + \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1}\right]$ ثم اوجد تحويل لابلاس التالي $L[e^{3t}\, sin4t]$**

الحل:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+25} + \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1}\right] = \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{(5)(1)}{s^2+25}\right] + 3L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5t + 3 + 2e^{-t}$$

---

$$L[e^{3t} sin4t] \Rightarrow \ F(s) = L[sin\, 4t] = \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{4}{s^2+16}$$

$$L[e^{3t}\sin 4t] = F(s-a) \Rightarrow L[e^{3t}\sin 4t] = \frac{4}{(s-a)^2+16}$$

**٣- اوجد الحل لمسالة القيمة الابتدائية التالية : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xe^t$ حيث الشروط الابتدائية هي**

$$\boldsymbol{u(0,t) = t \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^t}$$

**الحل:**

لدينا المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xe^t$ تكامل بالنسبة ل $x$ ومنه : $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2e^t + F(t) \ldots\ldots\ldots (II)$

بحيث $F(t)$

دالة كيفية لاتحوي $x$ نكامل مرة ثانية لنوجد التابع $u$ ومنه:

$$u = \frac{x^3}{3}e^t + xF(t) + g(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

حيث $g(t)$ دالة كيفية تابعة ل $t$ فقط لا تحوي $x$ والآن بقي علينا إيجاد التابع $F(t), g(t)$

حسب شروط البدء لدينا : $u(0,t) = t \;,\; \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = e^t$ نعوض الشرط الأول في $(II)$

$$e^t = 0 + F(t) \to F(t) = e^t$$

الشرط الثاني نعوضه في التابع $u$ أي في$(III)$ ومنه:

$$t = 0 + 0 + g(t) \to g(t) = t \xRightarrow{\text{نعوض } F,g \text{ في التابع } u} u = \frac{x^3}{3}e^t + xe^t + t$$

---

***السؤال الثالث :*** **اوجد الحل التام للمعادلة بطريقة شارب : $\boldsymbol{(z+qy)^2 - p = 0}$**

**الحل:**

١) لنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2p(z+px) \,, \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \,, \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z+px) \,, \frac{\partial F}{\partial p} = 2x(z+px) \,, \frac{\partial F}{\partial q} = -1$$

٢) نعوض هذه المشتقات في الجملة الملحقة التي أخذناها في المحاضرة السابقة(معادلة (8) )

$$\frac{dx}{2x(z+px)} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{2xp(z+px)-q} = -\frac{dp}{4p(z+px)} = -\frac{dq}{2q(z+px)}$$

من $(1)\&\&(4)$ نجد :

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=-\frac{dp}{4p(z+px)} \Rightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{dp}{2p} \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln x=-\frac{1}{2}\ln p+\ln \alpha \rightarrow$$

$$\ln x=\ln\frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow x=\frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} p=\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{q}{x^2}\left(\alpha^2=a \text{ باعتبار أن}\right) \Rightarrow \boldsymbol{p=\frac{a}{x^2}}$$

والآن نعوض $p$ في المعادلة $(1)$ ومنه :

$$\left(z+\frac{a}{x^2}x\right)^2-q=0 \Rightarrow q=\left(z+\frac{a}{x^2}x\right)^2=\left(z+\frac{a}{x}\right)^2$$

نعوض في المعادلة الكلية والتي من الشكل:

$$dz=pdx+qdy \Rightarrow dz=\frac{a}{x^2}dx+\left(z+\frac{a}{x^2}x\right)^2dy \Rightarrow$$

$$dy=\frac{dz-\frac{a}{x^2}dx}{\left(z+\frac{a}{x^2}x\right)^2}$$

نريد علاقة تجمع بين البسط والمقام ولذلك فاضلنا البسط بحيث:

$$dy=\frac{d\left(z+\frac{a}{x}\right)}{\left(z+\frac{a}{x^2}x\right)^2} \quad \text{البسط عبارة عن مشتق المقام}$$

بالمكاملة نجد :

$$y+b=-\frac{1}{z+\frac{a}{x}} \Rightarrow z+\frac{a}{x}=-\frac{1}{(y+b)} \Rightarrow z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+b}=0 \text{ الحل التام}$$

أما في حالة الحل العام يكون من الشكل :

$$z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+\tau(a)}=0$$

أما في حالة الحل الخاص نعوض بدل $\tau(a)$ عدد ما وليكن $2a$ ومنه:

$$z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+2a}=0$$

***السؤال الرابع :*** **اوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية**

**$x(y^2+z)p - y(x^2+z)q = (x^2-y^2)z$ والمار بالمستقيم المعين ب :**

**$x+y=0 \quad , \quad z=1$**

## الحل:

نكتب الجملة الملحقة ومنه :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \rightarrow \frac{dx}{x(y^2+z)}=\frac{dy}{-y(x^2+z)}=\frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

نضرب الأولى ب $y$ والثانية ب $x$ ومنه:

$$\frac{ydx+xdy}{xy^3+xyz-yx^3-xyz}=\frac{dz}{(x^2-y^2)z} \xRightarrow{\text{نخرج } yx \text{ عامل مشترك من المقام}}$$

$$\frac{ydx+xdy}{yx(y^2+z-x^2-z)}=\frac{dz}{(x^2-y^2)z} \rightarrow \frac{ydx+xdy}{yx(y^2-x^2)}=\frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

$$\frac{ydx+xdy}{yx(y^2-x^2)}=-\frac{dz}{(y^2-x^2)z} \rightarrow \frac{ydx+xdy}{yx}=-\frac{dz}{z} \dots\dots\dots (\#)$$

نعلم أن (#) هي $d(xy)=xdy+ydx$ وبالتالي $\frac{d(xy)}{yx}=-\frac{dz}{z}$ بالمكاملة:

$$ln|xy|=-ln|z|+ln(C_1) \rightarrow ln(x.y)=ln\left(\frac{1}{z}\right)+lnC_1 \xRightarrow{\text{وحسب خواص اللوغاريتم}}$$

$$xy=\frac{C_1}{z} \rightarrow \boldsymbol{x.y.z=C_1}$$

الآن نضرب النسبة (١) ب $x$ والثانية ب $y$ ونطرح (٣) منهما:

$$\frac{xdx+ydy-dz}{x^2(y^2+z)-y^2(x^2+z^2)-(x^2-y^2)z}=\frac{xdx+ydy-dz}{0} \rightarrow$$

$$xdx+ydy-dz=0 \xRightarrow{\text{نكامل}} \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z=C_2' \xRightarrow{\text{نضرب الطرفين ب٢}}$$

$$x^2+y^2-2z=C_2' : \quad C_2=2C_2'$$

وبالتالي تكون معادلة السطوح التكاملية هي :

$$F(C_1, C_2) = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{F(x.y.z, x^2 + y^2 - 2z) = 0}}$$

ولإيجاد السطح التكاملي المار بالمنحنيين: لدينا أولاً

$$x + y = 0 \ldots \ldots .. (2) \;\; \&\&\& \;\; z = 0$$

ولدينا أيضاً: $x^2 + y^2 - 2z = C_2 \ldots \ldots \ldots (4)$ $\&\&$ $x.y.z = C_1 \ldots \ldots \ldots (3)$

لنأخذ المعادلات الوسيطية للمنحني $z = 1$ وهي $\boldsymbol{x = t \;\; \&\& \; y = -t}$ نعوض في (٣)

$$\boldsymbol{C_1 = -t^2} \xRightarrow{\text{نعوض المعادلات الوسيطية في}(4)} t^2 + t^2 - 2 = C_2 \rightarrow C_2 = 2t^2 - 2$$

$$\boldsymbol{C_2 = -2C_1 - 2}$$

والآن نعوض كل من $C_1, C_2$ بما يساويان ومنه:

وهي معادلة السطح المطلوب : $\boxed{\boldsymbol{-2x.y.z - 2 = x^2 + y^2 - 2z}}$

---

## أسئلة الدورة الفصلية الأولى (2017-2018) :

### السؤال الأول: (٣٠ درجة)

**اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $\boldsymbol{4xy'' + 2y' + y = 0}$ في جوار $\boldsymbol{x_0 = 0}$**

### السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

**اوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية $\boldsymbol{x^2p + y^2q = (x + y)z}$**

### السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

**باستخدام تحويلات لابلاس اوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية:**

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k \sin \pi x}$$

**حيث : $\boldsymbol{z(0,t) = z(1,t) = 0 \;\; ; \;\; z(x,0) = z'(x,0) = 0 \;\; , \;\; c > 0 \;\; , \;\; t > 0}$**

### السؤال الرابع: (٢٠ درجة)

اوجد الحل لجملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين :

$$\frac{dy}{dx} = z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -y$$

---

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى لعام (2017-2018) :

***السؤال الأول: (٣٠ درجة)*** **اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $4xy'' + 2y' + y = 0$ في جوار $x_0 = 0$**

**الحل:**

نقسم على أمثال $y''$ :

$$y'' + \frac{2}{4x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة.

والآن لنرى فيما إذا كانت $x_0 = 0$ هل هي نظامية أم لا ؟!؟

إن النقطة $x_0 = 0$ تُحقق أنها صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر بالنسبة ل $p$ .

و تُحقق أنها صفراً من الدرجة الثانية على الأكثر بالنسبة ل $q$ .

إذاً $x_0 = 0$ شاذة نظامية... ☺

نرد المعادلة التفاضلية $(1)$ إلى الشكل النظامي والذي هو:

$$x^2.y'' + x.p(x).y' + q(x).y = 0$$

نضرب المعادلة التفاضلية $(1)$ ب $(x)$ ونقسم على $(4)$ فتصبح على الشكل التالي:

$$x^2.y'' + \frac{x}{2}.y' + \frac{x}{4}.y = 0$$

أي:

$$p(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad q(x) = \frac{x}{4}$$

ومنه تكون المعادلة المميزة:

$$\lambda(\lambda-1)+\mathrm{p}(0).\lambda+\mathrm{q}(0)=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)+\frac{1}{2}\lambda+0=0$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda-1)+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda^2-\lambda=0$$

$$\lambda(2\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}\ , \qquad \lambda_2=0$$

ولا ننسى أن $\lambda_1$ دائما هي الجذر الأكبر...😉

نوجد الحل من الشكل:

$$y=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad or \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\lambda}$$

- نشتق:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_nx^{n+\lambda-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_nx^{n+\lambda-2}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية:

$$4x.y''+2y'+y=0$$

$$4x.\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_nx^{n+\lambda-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_nx^{n+\lambda-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\lambda}=0$$

$$\underbrace{4\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_nx^{n+\lambda-1}}_{1}+\underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_nx^{n+\lambda-1}}_{2}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\lambda}}_{3}=0$$

- نوحد القوى :

نبدل كل $n$ ب $(n-1)$ في المتسلسلة $(3)$:

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+\lambda-1}=0$$

نخرج $x^{\lambda}$ عامل مشترك:

$$x^{\lambda}\left[4\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-1}\right]=0$$

نقسم على $x^{\lambda}\neq 0$ :

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-1}=0$$

- نوحد الحدود الدنيا:

$$4\lambda(\lambda-1).c_0.x^{-1}+4\sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n-1}+2\lambda.c_0.x^{-1}$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-1}=0$$

$$4\lambda(\lambda-1).c_0.x^{-1}+2\lambda.c_0.x^{-1}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[4(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n+2(n+\lambda)c_n+c_{n-1}]\,x^{n-1}=0$$

- بالمطابقة:

$$x^{-1}\text{ أمثال }=0\Rightarrow 4\lambda(\lambda-1).c_0+2\lambda.c_0=0$$

$$[4\lambda(\lambda-1)+2\lambda]c_0=0\Rightarrow[2\lambda(2\lambda-1)]c_0=0$$

بما أن $c_0\neq 0$ فيكون :

$$2\lambda(\lambda-1)=0\Rightarrow\ \lambda_1=\frac{1}{2}\ ,\qquad \lambda_2=0$$

$$x^{n-1}\text{ أمثال }=0\Rightarrow\ 4(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n+2(n+\lambda)c_n+c_{n-1}=0$$

$$[4(n+\lambda)(n+\lambda-1)+2(n+\lambda)]c_n+c_{n-1}=0$$

$$2(n+\lambda)[2(n+\lambda-1)+1]c_n + c_{n-1} = 0$$

$$2(n+\lambda)(2n+2\lambda-1)c_n + c_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow c_n = -\frac{c_{n-1}}{2(n+\lambda)(2n+2\lambda-1)}\ ; n \geq 1$$

- نوجد الحل الخاص الأول:

الجذر الكبير $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ :

$$y_1 = x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{2}} \ldots \boxed{2}$$

نوجد الثوابت من أجل $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ :

بدايةً نعوض $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية:

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2(n+\lambda)(2n+2\lambda-1)}\ ; n \geq 1$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n(2n+1)}\ ; n \geq 1$$

$$n = 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{c_0}{3.2} = -\frac{c_0}{3!}$$

$$n = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_1}{5.4} = -\frac{c_0}{5.4.3!} = -\frac{c_0}{5!}$$

$$n = 3 \Rightarrow c_3 = -\frac{c_2}{7.6} = -\frac{c_0}{7.6.5!} = -\frac{c_0}{7!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.c_0$$

نعوض الثوابت في الحل الخاص الأول $\boxed{2}$ :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.x^{\frac{2n+1}{2}}\ ; c_0 = 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} . \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

- لإيجاد الحل الخاص الثاني:

نجد أن $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}$ (ليس عدداً صحيحاً ) فيكون الحل الخاص على الشكل التالي:

$$y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\, x^n$$

نعوض $\lambda_2 = 0$ في العلاقة التكرارية:

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$n = 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{c_0}{2!}$$

$$n = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{4!}$$

$$n = 3 \Rightarrow c_3 = -\frac{c_0}{6!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} . c_0$$

نعوض الثوابت في الحل الخاص الثاني ونعوض $c_0 = 1$ :

$$y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\, x^n \;\; ; \; \lambda_2 = 0$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} . x^{\frac{2n}{2}} \; ; x^n = x^{\frac{2n}{2}}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} . \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية الخطية من المرتبة الثانية هو:

$$y = A . y_1 + B . y_2$$

$$y = A.\sin(\sqrt{x}) + B.\cos(\sqrt{x})$$

**السؤال الثاني: (٢٠ درجة)** اوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية $x^2p + y^2q = (x+y)z$

الحل:

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{y^2}}_{(2)} = \underbrace{\frac{d}{(x+y)\,z}}_{(3)}$$

بأخذ $(1) = (2)$ نجد: $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$

بمكاملة الطرفين يكون:
$$\Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = u$$

والآن بأخذ $(1) - (2) = (3)$ نجد:

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)\,z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x+y)\,z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)} = \frac{dz}{z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\ln(x-y) = \ln z + \ln c_2$$

$$\Rightarrow \ln(x-y) - \ln z = \ln c_2 \Rightarrow \ln\left(\frac{x-y}{z}\right) = \ln c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{x-y}{z} = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(c_1\,, c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\frac{x-y}{z}\right)=0$$

**السؤال الثالث: (٣٠ درجة)** باستخدام تحويلات لابلاس اوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k\sin\pi x$$

حيث : $z(0,t)=z(1,t)=0\ ;\ z(x,0)=z'(x,0)=0\ ,\ c>0\ ,\ t>0$

**الحل:**

لنأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]=\frac{1}{c^2}L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right]-k\sin(\pi x)L[1]$$

$$Z"(x,S)=\frac{1}{c^2}\left[S^2Z(x,S)-Sz(x,0)-z'(x,0)\right]-\frac{k}{s}\sin(\pi x)$$

من شروط البدء معدومان

$$Z=\frac{1}{C^2}S^2Z-\frac{k}{S}\sin(\pi x)\rightarrow Z-\frac{S^2}{C^2}Z=-\frac{k}{S}\sin(\pi x)\ \ldots\ldots\ldots(\$)$$

معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$Z"-\frac{S^2}{C^2}Z=0\xrightarrow{\text{المعادلة المميزة}}\lambda^2-\frac{S^2}{C^2}=0\rightarrow\lambda^2=\frac{S^2}{C^2}$$

$$\lambda_1=\frac{S}{C}\ \&\&\ \lambda_2=-\frac{S}{C}\xrightarrow{\text{والحل العام هو}}Z_1=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}=C_1e^{\frac{S}{C}x}+C_2e^{-\frac{S}{C}x}$$

والآن نوجد حل خاص مع طرف ثان ونلاحظ أن الطرف الثاني من الشكل $A\sin(\pi x)$ وبالتالي فالحل الخاص هو $Z_2=A\sin(\pi x)$ نوجد المشتقات :

$$Z_2'=A\pi\cos(\pi x)\ \&\&\ Z_2"=-A\pi^2\sin(\pi x)\xrightarrow{\text{نعوضهما في}(\$)}$$

$$-A\left(\pi^2+\frac{S^2}{C^2}\right)\sin(\pi x)=-\frac{k}{S}\sin(\pi x)\rightarrow A\left(\frac{\pi^2C^2+S^2}{C^2}\right)=\frac{k}{S}\rightarrow$$

$$A=\frac{k}{S}\cdot\frac{C^2}{S^2+\pi^2C^2}\xRightarrow{\text{نعوض}A\text{في}Z_2}Z_2=\frac{kC^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\sin(\pi x)$$

والحل الأخير هو تركيب خطي للحلين $Z_1\&Z_2$ ومنه :

$$Z=C_1e^{\frac{S}{C}x}+C_2e^{-\frac{S}{C}x}+\frac{kC^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\sin(\pi x)$$

لمعرفة الثوابت $C_1\ \&\&\ C_2$ نستخدم الشروط الابتدائية:

$$Z(x,S)=\int_0^\infty z(x,t)e^{-St}dt\ \ \&\&\ Z(0,S)=\int_0^\infty z(0,t)e^{-St}dt=0$$

وبالتالي فإن $Z=0$ عندما $x=0$ نعوض في $Z$:

$$Z=C_1+C_2+0=0\rightarrow C_1=-C_2\ \ldots\ldots\ldots(\#)$$

نستخدم الشرط الابتدائي الثاني $z(1,t)=0$ ومنه :

$$Z(1,S)=\int_0^\infty z(1,t)e^{-St}dt=0\overset{\text{ومنه}}{\Rightarrow}x=1\ \text{عندما}z=0$$

من(#) نجد: $C_1.e^{\frac{S}{C}}-C_2e^{-\frac{S}{c}}=0\rightarrow C_1e^{\frac{S}{C}}+C_1e^{-\frac{S}{C}}=0\rightarrow C_1=0\ \&\&\ C_2=0$

وبالتالي أصبحت $Z$ بالشكل : $Z=\frac{kC^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\sin(\pi x)\xRightarrow{\text{نفرق الكسر}}$

$$\frac{1}{S(S^2+\pi^2C^2)}=\frac{A}{S}+\frac{BS+d}{S^2+\pi^2C^2}=\frac{AS^2+A\pi^2C^2+BS^2+dS}{S(S^2+\pi^2C^2)}=$$
$$\frac{(A+B)S^2-dS+A\pi^2C^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\rightarrow A\pi^2C^2=1\rightarrow A=\frac{1}{\pi^2C^2}\ \&\ d=0\&B=-A$$

نعوض في $Z$ ومنه:

$$Z=kC^2\sin(\pi x)\left(\frac{A}{S}+\frac{BS+d}{S^2+\pi^2C^2}\right)=kC^2\sin(\pi x)\left(\frac{1}{S}.\frac{1}{\pi^2C^2}-\frac{1}{\pi^2C^2}.\frac{S}{S^2+\pi^2C^2}\right)$$
$$=\frac{k}{\pi^2}\sin(\pi x)\left(\frac{1}{S}-\frac{S}{S^2+\pi^2C^2}\right)$$

حيث أخرجنا $\frac{1}{\pi^2C^2}$ عامل مشترك نأخذ الآن التحويل العكسي:

$$L^{-1}[Z(x,S)] = \sin(\pi x)\left[\frac{k}{\pi^2} - \frac{k}{\pi^2}\cos(\pi Ct)\right] : L^{-1}\left[\frac{S}{S^2 + C^2\pi^2}\right] = \cos(\pi Ct)$$

ومنه :

$$z(x,t) = \frac{k}{\pi^2}\sin(\pi x).[1 - \cos(\pi Ct)]$$

**السؤال الرابع: (٢٠ درجة) اوجد الحل لجملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين :**

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad , \qquad \frac{dz}{dx} = -y$$

**الحل:**

$(1)$من $\Rightarrow y' = z \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} y = z' \xrightarrow{\text{من}(2)} y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda = \mp i \Rightarrow \mathbf{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x}$ : وهو الحل العام

ولكن من $(1)$ لدينا $y' = z$ ومنه:

$$z = y' = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

ومنه الحل هو :

$$(y,z) = (c_1 \cos x + c_2 \sin x, -c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

مع تمنياتنا بالتفوق والنجاح " فريق سيريا ماث "

اعداد: عُلا الداالاتي☺بسمة نصر الله