◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: السادسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: حل تمارين

تمرين 1 : لتكن لدينا الدالة:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

أوجد النقاط الحرجة ثم ادرس فيما إذا كانت النقاط قصوى أم لا.

الحل

لنوجد أولاً f_x , f_y :

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \dots (1)$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \dots (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) :

$$4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$ei: x^2 - xy + y^2 = 0$$

$$or: (x+y) = 0 \Rightarrow x = -y$$

$a^3 + b^3 =$ $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$

نعوض بالمعادلة (1) :

$$4x^3 - 4x - 4x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$$

$$ei: 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$or: x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \mp\sqrt{2}$$

وعليه تكون النقاط الحرجة هي النقطتان:

$$(0,0), (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$$

نوجد المحددات :

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$$

$$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$$

لنأخذ القيم $(+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

$$\Delta_1(+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0$$

ومنه النقطة $(+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ صغرى نسبية وبنفس الطريقة نجد $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ صغرى نسبية...😃

- والآن بالنسبة للنقطة $(0,0)$ فإن:

$$\Delta_1(0,0) = -4 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

ومنه نحن الآن أمام حالة فشل 😢، لنأخذ الجوار:

$N((0,0), \delta)$ لدينا $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ نعوض:

$$\frac{\delta^4}{16} - \frac{\delta^2}{2} = \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\delta^2}{8} - 1\right)$$

لنأخذ :

$$\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) + N((0,0), \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^4}{16} \underbrace{- \frac{\delta^2}{2} + \frac{4\delta^2}{4} - \frac{\delta^2}{2}}_{=0} = \frac{2\delta^2}{16} > 0 = f(0,0)$$

لذلك نجعل النقطة الأولى:

$$\underbrace{\frac{\delta^2}{2}}_{\text{موجب حتماً}} \left(\frac{\delta^2}{8} - 1\right) < 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{8} - 1 < 0 \Rightarrow \delta^2 < 8 \Rightarrow \delta < 2\sqrt{2}$$

أي $(0,0)$ ليست قصوى نسبية !؟ لأنه تارة تكون أكبر من $f(0,0)$ وتارة أخرى تكون أصغر

وبهذا يتم المطلوب.

تمرين 2 : لتكن لدينا الدالة: $f(x,y) = 2\sin(x^2+y^2)+1$

أوجد النقاط الحرجة ثم ادرس فيما إذا كانت قصوى أم لا.

الحل

نوجد المشتقات $f_x\,,f_y$:

$$f_x(x,y) = 4x\cos(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow x = 0\,,\cos(x^2+y^2) = 0$$

$$f_y(x,y) = 4y\cos(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow y = 0\,,\cos(x^2+y^2) = 0$$

إذاً النقطة $(0,0)$ حرجة وأيضاً النقاط الحرجة هي التي تحقق أنَّ:

$$\cos(x^2+y^2) = 0$$

أي:

$$x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+\pi k$$

إن:

$$f_{xx}(x,y) = 4\cos(x^2+y^2) - 8x^2\sin(x^2+y^2)$$

$$f_{yy}(x,y) = 4\cos(x^2+y^2) - 8y^2\sin(x^2+y^2)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 8xy\sin(x^2+y^2)$$

$$\Delta_1(0,0) = f_{xx}(0,0) = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

إذاً $(0,0)$ صغرى نسبية.

نعلم انّ:

$$-1 \le \sin(x^2+y^2) \le 1$$

$$\xRightarrow{\text{نضرب ب } 2} -2 \le 2\sin(x^2+y^2) \le 2$$

$$\xRightarrow{\text{نضيف } 1 \text{ لكل حد}} -1 \le 2\sin(x^2+y^2)+1 \le 3$$

ومنه:

$$-1 \le 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right) \le 3$$

ومنه: (3) عظمى مطلقة عندما k عدد زوجي.

(-1) صغرى مطلقة عندما k عدد فردي.

تمرين 3 : أوجد أصغر مساحة بين النقطة $A(0,0,a)$ عن مجموعة النقاط:

$$\{(x,y,z); z = x.y\} \ , \qquad a > 0$$

الحل

$$f(x,y,z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$$

$$f(x.y) = x^2 + y^2 + (x.y - a)^2$$

$$f_x(x,y) = 2x + 2y(x.y - a) = 0 \dots (1)$$

$$f_y(x,y) = 2y + 2x(x.y - a) = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) ب x ، ونضرب المعادلة (2) ب y :

$$2x^2 + 2yx(x.y - a) = 0 \dots (3)$$

$$2y^2 + 2xy(x.y - a) = 0 \dots (4)$$

نطرح المعادلة (4) من المعادلة (3) ف ينتج لدينا التالي:

$$2x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \boxed{x = \pm y} \dots (*)$$

$\boxed{1}$ لمّا $x = +y$ نعوض بإحدى المعادلات ولنأخذ المعادلة (1) :

$$2x + 2x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow 2x(1 + x^2 - a) = 0$$

$$ei: 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{مرفوض})$$

$$or: 1 + x^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = a - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a-1}$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض ب}(*)} y = \pm\sqrt{a-1}$$

$$\Rightarrow (\text{نقاط حرجة}) \begin{cases} \left(+\sqrt{a-1}, +\sqrt{a-1}\right) \\ \left(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}\right) \end{cases}$$

$\boxed{2}$ أما إذا اخترنا $x = -y$ فإنه:

$$2x - 2x(-x^2 - a) = 0 \Rightarrow 2x[1 + x^2 + a] = 0$$

$$ei: x = 0 \quad (\text{مرفوض})$$

$$or: x^2 = -1 - a = -(1 + a) \quad (\text{مرفوض})$$

اي النقاط الحرجة هي $\begin{matrix} \left(+\sqrt{a-1}, +\sqrt{a-1}\right) \\ \left(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}\right) \end{matrix}$ بشرط $(a > 1)$.

$$f_{xx}(x,y) = 2 + 2y^2$$

$$f_{yy}(x,y) = 2 + 2x^2$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2(x.y - a) + 2yx = 4xy - 2a$$

$$f_{xx}\left(\pm\sqrt{a-1}, \pm\sqrt{a-1}\right) = 2 + 2(a-1) = 2a > 0$$

$$f_{yy}\left(\pm\sqrt{a-1}, \pm\sqrt{a-1}\right) = 2a > 0$$

$$f_{xy}\left(\pm\sqrt{a-1}, \pm\sqrt{a-1}\right) = 4(a-1) - 2a = 2a - 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2a & 2a-4 \\ 2a-4 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2 - (4a^2 - 16a + 16) = 16a - 16 > 0$$

ومنه : $a > 0$.

تمرين 4 : (وظيفة)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(2,1,-3)$ والمستوي $D: 2x + y - 2z = 4$.

تمرين 5 : أوجد منشور من المرتبة الثانية في جوار $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ للدالة:

$$f(x,y) = y\, cos(x.y)$$

الحل

إن القانون يعطى بالشكل:

$$f(a+h\,,b+k\,) - f(a,b) = \sum \frac{1}{n!}\left(h.\frac{\partial}{\partial x} + k.\frac{\partial}{\partial y}\right)^n .f(a,b)$$

نوجد المشتقات الجزئية عند $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$:

لدينا:

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 0$$

$$f_x(x,y) = -y^2 \sin(x.y) \Rightarrow f_x\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = -1$$

$$f_y(x,y) = cos(x.y) - y.x.sin(x.y) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f_{xx}(x,y) = -y^3 cos(x.y) \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 0$$

$$f_{yy}(x.y) = -x\,sin(x.y) - x\,[sin(x.y) + x.y.cos(x.y)]$$

$$\Rightarrow f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}[1] = -\pi$$

$$f_{xy}(x,y) = -2y\,sin(x.y) - y^2.x.cos(x.y)$$

$$\Rightarrow f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -2$$

$$f_{yx}(x,y) = -y\,sin(x.y) - y\,[sin(x.y) + x.y.cos(x.y)]$$

$$\Rightarrow f_{yx}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -1 - 1[1+0] = -2$$

نعوض جميع ما سبق في القانون:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\,,1+k\right) = (1+k)\cos\left(\frac{\pi}{1}+h\right)(1+k)$$

$$\underbrace{(1+k)}_{y}\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{1}+h\right)}_{x}(1+k) - 0 = -\frac{h}{1!} - \frac{\pi}{2}.\frac{k}{1!} + \frac{1}{2!}.[h^2(0) + 2hk(2) - \pi k^2]$$

لكن القانون يكتب بالشكل:

$$\frac{1}{2!}\left(h.\frac{\partial}{\partial x} + k.\frac{\partial}{\partial y}\right).f\left(\frac{\pi}{2},1\right) = \frac{1}{2!}.\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$\Rightarrow y.cos(x.y) = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(y-1) - 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) - \frac{\pi}{2}(y-1)^2$$

◄ملاحظة : إنّ:

$$\left(h.\frac{\partial}{\partial x} + k.\frac{\partial}{\partial y}\right).f(a,b) = h.\frac{\partial f}{\partial x} + k.\frac{\partial f}{\partial y}$$

وأنّ:

$$\left(h.\frac{\partial}{x} + k.\frac{\partial}{\partial y}\right)^2.f(a,b) = h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_رهف النقشي_سارة شهاب