7+3-5-2018

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :السادسة عشر و السابعة عشر

عنوان المحاضرة:القياس و خواصه

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. القياس

القياس:

a) تعريف القياس
b) خواص القياس
c) القياس الخارجي
d) مقارنة بين القياس و القياس الخارجي
e) المجموعة القيوسة
f) مبرهنات: بين القياس و القياس الخارجي
g) جبر بوريل
h) قياس لوبيغ
i) التوابع القيوسة
j) مثال عن التوابع القيوسة (التابع المميز(الدرجي))
k) خواص التابع المميز
l) التابع البسيط و خواصه \تابع القياس\
m) تكامل لوبيغ بالنسبة للتابع البسيط مع بعض الأمثلة

حيث سندرس ل g

تعريف القياس:

اذا كانت $X \neq \emptyset$ و ليكن $\mathcal{A}$ جبرا أو جبرا تاما على X نعرف التابع

$$\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$$

حيث $\overline{\mathbb{R}_+}$ تعني مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة الموسعة حيث $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$

نقول عن التابع μ أنه قياس أو يمثل قياسا اذا تحقق الشرطين

1) $\mu(\emptyset) = 0$ أي أن قياس الخالية يساوي الصفر
2) $\forall A_i \in \mathcal{A} \ : A_i \cap A_j = \emptyset$ حيث $i \in \mathbb{N}$ و $i \neq j$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

ملاحظات:

1) نسمي الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء القياس
2) عناصر $\mathcal{A}$ تسمى مجموعات قيوسة
3) إذا كان $\forall A \in \mathcal{A}: \mu(A) < \infty$
فإننا نسمي μ قياسا منتهيا و الفضاء فضاء منتهي
4) إذا كان $\mu(X) = 1$ فإننا نسمي μ دالة احتمال $(X, \mathcal{A}, \mu = P)$
5) إن $\forall A \in \mathcal{A}: \mu(A) \geq 0$

خواص القياس:

1- الخاصية الفرقية:

$\forall A, B \in \mathcal{A}$

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2- الخاصية الطردية:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}: A \subseteq B \ \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

3- الخاصية نصف الجمعية:

$$\forall A_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

4- خاصية الاستمرار من الأدنى (اجتماع):

لتكن $A_i \in \mathcal{A}$ حيث $i \in \mathbb{N}$ و حيث

متتالية من المجموعات المتزايدة $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$

و منه فإن $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

ملاحظات:

1- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

2- نسمي $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ الموجوعة الموسعة للأعداد الحقيقة

5- خاصية الاستمرار من الأعلى (التقاطع)

لتكن $A_i \in \mathcal{A}$ حيث $i \in \mathbb{N}$ و لتكن

متتالية من المجموعات المتناقصة $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

أمثلة عن القياس:

1- قياس العد (المجموعات القابلة للعد): $X \neq \emptyset$

$$\mu: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \to \mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{منتهية } A \\ +\infty & \text{غير منتهية } A \end{cases}$$

حيث $|A|$ عدد عناصر المجموعة A و نسم الثلاثية $(X, p(X), \mu)$ قياس العدد

و ذلك على حسب القياس $\mu(N) = +\infty \quad , \quad \mu(Z) = +\infty$

2- قياس ديراك: لتكن $X \neq \emptyset$ عندئذ من أجل كل عنصر $a \in X$ يمكن تعريف دالة قياس بالنسبة ل a

$$\mu_a: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \to \mu_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

تمارين:

-1 اذا كان $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء قيوسا برهن أن:

$$\forall A,B \in \mathcal{A} : \mu(A\Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$$

الحل:

نعلم أن $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

بأخذ القياس للأطراف $\underbrace{\mu(A\Delta B)}_{\substack{=0 \\ \text{من نص السؤال}}} = \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$ و

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu(A \setminus B) = 0 \\ \mu(B \setminus A) = 0 \end{cases}$$

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) = \overbrace{\mu(A) - \mu(A \cap B)}^{\text{الخاصة الفرقية}} = 0$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) \quad (1)$$

بنفس الطريقة بـ$\mu(B \setminus A) = 0$ نجد أن

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (B \cap A) = \overbrace{\mu(B) - \mu(B \cap A)}^{\text{الخاصة الفرقية}} = 0$$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) \quad (2)$$

من $(1) and\ (2)$ نجد أن $\mu(A) = \mu(B)$ و هو المطلوب

-2 اذا كان الفضاء $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء قيوسا بحيث:

$$B \subseteq X: \mu_B: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

برهن ان $\mu_B(A)$ يمثل قياسا على B

الحل:

لإثبات أن μ_B يمثل قياسا يجب علينا التحقق من شروط الواجب توفرها كي يكون قياسا وبذلك نبدأ

1) $\mu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$ كون التقاطع الخلية مع أي مجموعة يعطي الخالية

2) لنثبت أن $\mu_B(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$ حيث $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $i \neq j$ و هذا محقق لأن

$$\mu_B(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$$

و هو المطلوب

ملاحظة: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

أما إذا كانت A, B مجموعتان منفصلتان أي $A \cap B = \emptyset$ فإن $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

3- إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قيوسا أثبت ان:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

الحل:

إن $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

و منه $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

نعلم أن $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu\big(B \setminus (A \cap B)\big)$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

و هو المطلوب.

القياس الخارجي:

لتكن لدينا المجموعة غير الخالية $X \neq \emptyset$ و ليكن $p(X)$ صف المجموعات على X لنعرف التابع:

$$\mu^* : p(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

نقول عن μ^* أنها قياس خارجي على X اذا تحققت الشروط التالية:

$\mu^*(\emptyset) = 0$ (1

$A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (2

$\forall_{i\in\mathbb{N}} A_i \in p(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (3

نستنتج أن: كل قياس هو قياس خارجي و لكن العكس ليس صحيح بالضرورة.

مثال:

برهن أن التابع μ^* الذي يعرف كلاتي: $X \neq \emptyset$

$\mu^* : p(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ المعرف كما لي $\forall A \in p(X): \mu^*(A) = \sqrt{|A|}$

حيث $|A|$ عدد عناصر A

برهن على أن μ^* قياسا خارجيا على X و لكن لا يمثل قياسا على X

الحل:

لكي نثبت أولا أن μ^* قياسا خارجيا علينا التحقق من الشروط أي:

1) لتكن $A = \emptyset$ و منه فإن $|A| = 0$ أي أن

$$\mu^*(\emptyset) = \sqrt{|A|} = \sqrt{0} = 0$$

و منه قد تحقق الشرط الأول للقياس الخارجي

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B| \Rightarrow \sqrt{|A|} \leq \sqrt{|B|} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (2

و منه الشرط الثاني محقق أيضا

3) لإثبات الشرط الثالث في القياس الخارجي أولا نثبت عندما $i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$ ثم نقوم بجعل n تسعى ل ∞

$\forall_{i\in\mathbb{N}} A_i \in p(X): A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ و منه فإن

$$\sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |A_i|}$$

و نعلم أن $\sqrt{|A|+|B|} \leq \sqrt{|A|}+\sqrt{|B|}$ و منه فإن

و هذا صحيح أيا كانت n، $\sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|A_i|} \Longrightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$

و بجعل $n \to +\infty$ نجد أن (الحالة العامة)

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

ومنه فإن μ^* قياسا خارجيا و الأن لإثبات أن μ^* ليس قياسا سنأخذ مثال لا يحقق أن μ^*

و لنأخذ

$$A = \{1,2,3,\dots,16\}$$
$$B = \{17,\dots,25\}$$

إن $A \cap B = \emptyset$ و لكن

$$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

لأن $L_1: \mu^*(A \cup B) = \sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{25} = 5$

$$L_2: \mu^*(A) + \mu^*(B) = \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

و منه فإن القياس الخارجي ليس بالضروري أن يكون قياسا.

تساؤل:

هل يمكن استنباط من $p(X)$ صف جديد بحيث يكون القياس الخارجي لهذا الصف يمثل قياسا؟

الجواب: نعم و هذا الصف هو $A = \{\emptyset, X\}$ و منه

$$\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}+$$

حيث $\mu = {\mu^*}/_{\mathcal{A}}$ (μ هو مقصور μ^* على $\mathcal{A}$)

مجموعات القياس(في فضاء القياس الخارجي):

ليكن $(X, p(X), \mu^*)$ فضاء خارجي و ليكن $A \in p(X)$ $(A \subseteq X)$

نقول عن A أنها قيوسة اذا حققت الشرط:

$$\forall E \subseteq X \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

توضح للشرط:

$$E = E \cap X \Rightarrow E = E \cap (A \cup A^c)$$

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

و كون $(E \cap A^c)$ و $(E \cap A)$ مجموعتين منفصلتين فنستطيع أخذ القياس

و منه نستطيع أخذ القياس الخارجي و بالاستفادة من الشرط الثالث فإن

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((E \cap A) \cup (E \cap A^c)\big) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

أي أن $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ دائما صحيحة

و ليتحقق الشرط يجب إثبات $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ (و هذا محقق) لا يجاد شرط المجموعة القيوسة و تحقق المساواة

نتيجة : $\emptyset, X$ مجموعتين قيوستين لأن

$$A = \emptyset \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E)$$
$$A = X \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E)$$

مبرهنة (1):

اذا كان μ^* قياسا خارجيا على $p(X)$ بحيث

$$\mu^* : \; p(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

فإنه يوجد قياس μ على جبر تام من $p(X)$ و ليكن $\mathcal{A}$ بحيث يحقق :

$$\mu \ : \ \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

بحيث أن $\mu^*/_{\mathcal{A}} = \mu$ (أي مقصور μ^* على $\mathcal{A}$)

مبرهنة (2):

اذا كانت m^* مجموعة جميع المجموعات القيوسة فإن

1) m^* تمثل جبرا تاما على X

2) مقصور القياس الخارجي μ^*على m^* يمثل قياسا أي أن $\mu^*/_{m^*} = \mu$) μ تمثل قياسيا بحيث ليس هنالك تابع معين (كون μ تابع))

جبر بوريل:

اذا كانت $X = \mathbb{R}$ و كانت τ (التبولوجيا المألوفة) حيث

$\tau = \{A : A \subseteq \mathbb{R}; \forall x \in A, \exists a, b \in \mathbb{R} : a < x < b \ (أو\ x \in]a, b[\subseteq A)\}$ مألوفة

فإن أصغر جبر تام يحتوي على τ يمثل جبر بوريل و نرمز له ب $B(X)$

مثال تبولوجي نستفيد منه لاحقا:

ليكن لدينا $X = \{1,2\}$ و $\tau = \{\{1\}\}$

هل تشكل τ تبولوجيا على X إذا كانت لا تشكل تبولوجيا فجعلها تشكل تبولوجيا على X؟

إن τ لا تحقق تبولوجيا على X و لجعلها تشكل

نضيف ل τ $(X, \emptyset)$ فتصبح $\tau = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ تشكل تبولوجيا كون شرط الاجتماع و التقاطع محققان

و لكنها لا تمثل جبر لعدم وجود $X \setminus \{1\}$ لأن لكي تكون جبرا يجب أن تكون τ مغلقة بالنسبة ل $\{\cup, c, \Delta, \setminus\}$ و طبعا كون τ منتهية فيمكننا أن نولد جبرا منها و يكون ذلك بإضافة بعض المجموعات لكي تصبح جبر و منه فإن $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$ يكون جبرا

قياس لوبيغ:

هو تابع μ (قياس) معرف على جبر بوريل بالشكل

$$\mu : B(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{+}$$

و يحقق:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $i \neq j$: $I_i \cap I_j = \emptyset$: $\forall_{i \in \mathbb{N}} I_i \in B(X)$ و منه فإن

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$ بحيث

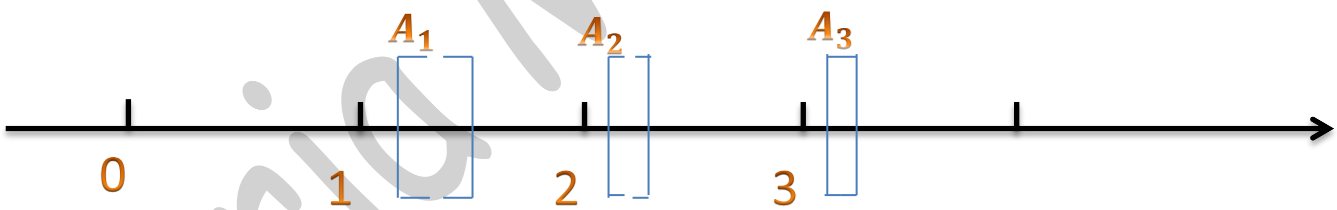
$$I = [a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[\implies \mu(I) = b - a$$

مثال:

أحسب قياس المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [n + 4^{-n}, n + 2^{-n}]$$

مع توضيح المجموعات الجزئية الأولى على المحور $\mathbb{R}$ عندما $n = 1,2,3,$



$$n = 1 \implies A_1 = \left[1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$n = 2 \implies A_2 = \left[2 + \frac{1}{16}, 2 + \frac{1}{4}\right]$$

$$n = 3 \implies A_3 = \left[3 + \frac{1}{64}, 3 + \frac{1}{8}\right]$$

من الواضح أن هذه المجموعات منفصلة مثنى مثنى أي A_n منفصلة مثنى مثنى

و بالتالي $\mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[n + \frac{1}{2^n} - n - \frac{1}{4^n}\right]}_{\text{قياس المجال هو النهاية ناقص بدايه}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

و هي متسلسلة هندسية (كلا الحدين في طارف الأيمن)

$$\mu(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

فمعنى ذلك إن طول هذه المجموعة هو $\frac{2}{3}$ السبب أن المجموعات دائما في تضائل كل ما كبرت n.

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي*ياسين الحليبي*شهد الحايك البوشي

to improve our mathematics

#ساعد غيرك