نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة: معادلات التوازن النسبي

بسم الله وبالله المستعان . . لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي سنتناول مثال عن الحركة النسبية ومعادلات التوازن النسبي ومبدأ دالمبير .

مثال

M نقطة مادية تتحرك على المستقيم oA بالسرعة v، المستقيم oA يدور حول θ في المستوي xoy بسرعة زاوية مقدارها ω **المطلوب**: أوجد سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمستوي بدلالة $\overrightarrow{oM} = \vec{r}$

الحل

لنأخذ في المستوي oxy المحورين x, y مبدأهما o ان حركة النقطة M على المستقيم (oA) حركة نسبية وسرعتها سرعة نسبية (v_r) على هذا المستقيم هي السرعة النسبية لهذه النقطة .
الحركة الدورانية للمستقيم (oA) هي حركة جرية للنقطة M وسرعة تلك النقطة من المستقيم (oA) التي تنطبق على M في اللحظة t تكون عبارة عن السرعة الجرية للنقطة M .
إن وضع النقطة M على المستقيم (oA) يتحدد بالمقدار $\boxed{oM = r}$ وهي تتحرك على دائرة نصف قطرها (r) ((بالحركة الجرية)) مقدار سرعتها الجرية $\boxed{v_e = \omega r}$ {لأنها عامودية على المحور (oM) }
وبالتالي $v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e . v_r . cos\varphi}$ وبملاحظة تعامد السرعتين النسبية والجرية نجد السرعة المطلقة هي

$$\boxed{v_a = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_r^2}}$$

معادلات التوازن النسبي

إذا أخذنا علاقة القوة النسبية $m\Gamma_r = F + J_e + J_c$ وبإخذ التسارع النسبي يساوي الصفر.
وإذا وجدت نقطة مادية بوضع التوازن بالنسبة للإحداثيات الديكارتية المتحركة $(oxyz)$
فإن سرعتها النسبية وتسارعها النسبي $v_r = \Gamma_r = 0$ وبالتالي يكون التسارع المتمم يكون معدوم $\Gamma_c = 2[\vec{\omega} \times \vec{v_r}] = 0$ وبالتالي إذا عوضنا قيم كل من ((Γ_c و Γ_r)) بالمعادلة (1) ينتج لدينا

$$\boxed{F + J_e = 0}$$

وهي معادلة التوازن النسبي .

وبالتالي نلاحظ أن معادلة التوازن النسبية تكون كمعادلة التوازن المنسوبة لجملة احداثيات ثابتة شريطة أن نضيف قوة العطالة الجرّية إلى القوة المؤثرة على النقطة المادية.

إن شرط التوازن في جملة إحداثية ثابتة هو أن تكون القوة الخارجية المؤثرة على هذه النقطة معدومة و هذه الصيغة تفيد أن النقطة المادية إما ثابتة أو أنها تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة

نطبق ما سبق بمثال على سفينة فضائية بجوار الأرض ولنفرض أن $\vec{F}$ هي ثقل نقطة مادية ضمن السفينة وأن السفينة تتحرك متسارعة ومبتعدة عن مركز الأرض وإن قوة العطالة الجرّية تتجه نحو مركز الأرض وبالتالي فإن شخصاً موجوداً بهذه السفينة سيشعر بقوة إضافية كبيرة تجذبه نحو الأرض

أما في حال اقتراب السفينة من مجال جاذب بتسارع موجب فإن قوة العطالة الجرّية المؤثرة على أي نقطة M كتلتها m داخل هذه السفينة تساوي $J_e = -m\Gamma_e$ و هي بعكس اتجاه قوة الجذب $\vec{F}$ وقد تتساوى هاتان القوتان بالقيمة المطلقة و لا يكون للنقطة أي وزن.

و هذا ما يحدث لروّاد الفضاء احياناً حين يتعرضون لحالة انعدام الوزن و هذا يختلف عن انعدام الوزن الذي ينعدم فيها تماماً تأثير قوة الجذب عندما تتحرك السفينة بحركة منتظمة بعيداً عن أي مجال جاذب.

مثال آخر : إذا فرضنا أن مصعداً يتحرك بتسارع Γ نحول الاسفل ويوجد شخص داخله ثقله P يقف ساكناً على أرض المصعد فإنه سيخضع لقوة عطالية J_e جرَية تساوي $J_e = -m\Gamma_e$ تتجه نحو الأعلى وإذا اقترب تسارع المصعد في هبوطه من التسارع الأرضي فإن الشخص يخضع لقوتين متعاكستين وبالتالي لن يشعر بوزنه .

معادلة الطاقة الحركية للحركة النسبية

انطلاقاً من معادلة التحريك الاساسية $m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c} \dots \dots (1)$

هذه المعادلة لا تختلف عن معادلة العامة $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$ إلا بإضافة الحدين $(\vec{J_e}, \vec{J_c})$

إذاً النظريات العامة تبقى صحيحة في الحركة النسبية إذا ما أخذنا للقوة الخارجية المؤثرة على النقطة المادية قوى عطالتها الجرَية و المتممة وبالتالي نظرية كمية الحركة

$$d(mv) = F.dt \qquad ; (v = v_a)$$

أما الحركة النسبية

$$d(mv) = F.dt + J_e.dt + J_c.dt \qquad ; (v = v_r)$$

كذلك في الطاقة الحركية

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr \qquad ; (v = v_a)$$

وفي حالة الحركة النسبية

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c.dr$$

لدينا :

$$J_c.dr = (-m\Gamma_c)dr = -2m(\omega \times v_r)dr = -2m\left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right)dr = 0$$

لأن $\left(\frac{dr}{dt}, dr\right)$ شعاعان متوازيان

و أصبحت لدينا نظرية الطاقة الحركية

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}.dr + \vec{J_e}.dr}$$

و هي عبارة عن الطاقة الحركية للحركة النسبية.

و هذا يعني أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوة المؤثرة على النقطة المادية بالإضافة للعمل الجزئي لقوة عطالتها الجرية.

مبدأ دالا مبير في علم الميكانيك

كنا نعتبر بالدراسة السابقة أن التوازن هو حالة خاصة من حالات الحركة تحدث عندما ينعدم تسارعها وبالتالي تنعدم محصلة القوة المؤثرة على النقطة ولكن تمثيل نيوتن ليس التمثيل الوحيد بالميكانيك حيث يمكن بناء علم ميكانيك على أسس ومبادئ اخرى من اهمها مبدأ **دالا مبير**

أولاً : يعتبر دالا مبير أن الحركة حالة خاصة من التوازن فإذا فرضنا نقطة مادية M كتلتها m تتحرك بتسارع تحت تأثير قوى محصلتها $\overrightarrow{F}$ ومعادلتها كما يراها نيوتن $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma}$

ولنفرض أن $\overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Gamma} = \vec{0}$ عندئذٍ $-m\overrightarrow{\Gamma} = \vec{J}$ يسمى $\overrightarrow{F} + \vec{J} = 0$ و $\vec{J}$ قوة العطالة و m خاضعة لقوتين الأولى القوة الفعالة $\overrightarrow{F}$ والثانية القوة العطالية $\vec{J}$ محصلتها تساوي الصفر وبالتالي يمكن اعتبار أن النقطة المادية متوازنة دوماً على مسارها تحت تأثير هاتين القوتين ((وهو نص دالا مبير لنقطة طليقة))

أما عندما تكون النقطة المادية مقيدة على منحني فإنها تخضع لقوة إضافية هي قوة رد الفعل أو قوة شد الحبل (الخيط) بالإضافة إلى القوة العطالية $\quad \overrightarrow{F} + \vec{J} + \vec{R} = 0 \dots (*)$ حيث $\vec{R}$ قوة الربط للمنحني او للسطح

ثانياً : لا يعتمد مبدأ دالا مبير على القوة المؤثرة إذ يمكن تعميمها ليشمل عزوم القوى المؤثرة وبالتالي إذا أخذنا العلاقة التالية $\overrightarrow{F} + \vec{J} = 0$ وضربناها خارجياً ب $(\vec{r})$ نجد..

$$(\vec{r} \times \vec{F}) + (\vec{r} \times \vec{J}) = 0$$

حيث : $(\vec{J} \times \vec{r})$ محصلة القوى العطالية المؤثرة على النقطة المادية

$(\vec{F} \times \vec{r})$ محصلة عزوم القوى الفعالة للنقطة المادية بالنسبة للمبدأ (o)

و هذان العزمان متعاكسان مباشرة ((النقطة المادية طليقة))

اما إذا كانت النقطة المادية مقيدة من العلاقة $(*)$ فنجد :

$$\overrightarrow{F} + \vec{J} + \vec{R} = 0$$

$$(\vec{r} \times \vec{F}) + (\vec{r} \times \vec{J}) + (\vec{r} \times \vec{R}) = 0$$

هذه العزوم تقع بمستوي واحد جميعها متعامدة على $(\vec{r})$.

ملاحظة : مبدأ دالمبير نحتاجه في معادلات لاغرانج ^_^

انتهت المحاضرة

إعداد : محمد علي فليون ** راما جوهر **عبير خزنة كاتبي