◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: الثانية عشر   عنوان المحاضرة: التراص في الفضاءات المترية

المحتوى العلمي :

١- نتائج عن الاستمرار.

٢- تعريف التغطية والتغطية الجزئية والمنتهية والمفتوحة.

٣- المجموعة المتراصة. وأمثلة عن التغطية والتراصّ.

نتائج:

١- نستنتج من المبرهنة الأولى في المحاضرة السابقة أنه إذا كان لدينا:

$$f, g: (X, d) \to (R, |.|)$$

تابعان مستمران في $x \in X$ فإن التوابع:

$$f \pm g\ , f.g\ , \frac{f}{g}\ , \alpha.f\ :\ \alpha \in R$$

هي توابع مستمرة في x لأنه إذا كان:

$$x_n \to x \Rightarrow \begin{cases} f(x_n) \to f(x) \\ g(x_n) \to g(x) \end{cases}$$

وهذا يعطي:

$$\boxed{1}\ (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

$$\boxed{2}\ (f.g)(x_n) = f(x_n).g(x_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (f.g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} [f(x_n).g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n).\lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

$$= f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

$$\boxed{3}\ \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$\boxed{4}\ (\alpha.f)(x_n) = \alpha.f(x_n) \rightarrow \ \alpha.f(x) = (\alpha.f)(x)$$

٢- ليكن: $(X,d) \xrightarrow{f} (Y,\rho) \xrightarrow{g} (Z,\gamma)$

بحيث أن f مستمر في x و g مستمر في $f(x)$ **فيكون** gof مستمر في x .

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$$

$$\Rightarrow g\big(f(x_n)\big) \rightarrow g\big(f(x)\big) \ \Rightarrow (gof)(x_n) \rightarrow (gof)(x)$$

التراصّ في الفضاءات المتريّة

تعريف التغطية: ليكن (X,d) فضاء متري عندئذٍ نقول عن الجماعة $\{A_i : i \in I\}$ من المجموعات الجزئية في X أنها تغطية للمجموعة $k \subseteq X$ إذا كان $k \ \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

التغطية الجزئية: نقول عن الجماعة $\{A_i : i \in J\}$ أنها تغطية جزئية من التغطية $\{A_i : i \in I\}$ إذا كان $J \subseteq I$.

التغطية المنتهية: نقول عن التغطية $\{A_i : i \in J\}$ أنها منتهية إذا كانت J مجموعة منتهية $\{i_1, \dots, i_n\}$.

التغطية المفتوحة: نقول عن التغطية $\{A_i : i \in I\}$ أنها مفتوحة إذا كانت المجموعات A_i مفتوحة في (X,d) .

المجموعة المتراصّة: نقول عن المجموعة $k \subseteq X$ أنها متراصّة إذا أمكن استخراج تغطية جزئية من كل تغطية مفتوحة ل k .

بكلام آخر: إذا كانت $\{A_i : i \in I\}$ تغطية مفتوحة ل k **فيجب** أن نوجد تغطية جزئية منها ومنتهية ل k ، ولتكن $J = \{i_1, \dots, i_n\}$; $\{A_i : i \in J\}$ عندها $k \subseteq A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$.

أمثلة:

١- أي مجموعة منتهية من النقاط في الفضاء المتري (X,d) متراصّة.

- لتكن لدينا $k = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

إن k متراصّة لأنه إذا كانت $k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ فإن A_i تغطية مفتوحة ل k

وإذا كان $x_1 \in A_{i_1}, x_2 \in A_{i_2}, \dots, x_n \in A_{i_n}$ فإن $k \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n}$ ومنه k متراصّة ☺.

٢- إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية في فضاء متري (X,d) ومتقاربة من $x' \in X$ وكانت $k = \{x_n\} \cup \{x\}$ عندئذٍ k متراصّة.

لأنه إذا كانت $\{A_i : i \in I\}$ تغطية مفتوحة للمجموعة k أي $k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ فإن x تنتمي لإحدى هذه المجموعات ولتكن A_{i_0} . أي $x \in A_{i_0}$ و A_{i_0} مجموعة مفتوحة إذاً:

$$\exists\, \mathcal{E} > 0 : N(x,\mathcal{E}) \subseteq A_{i_0}$$

$$x_n \to x \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* : n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \mathcal{E} \Rightarrow x_n \in N(x,\mathcal{E}) \subseteq A_{i_0}$$

إذاً كل حدود المتتالية x_n حيث $n \geq n_0$ تنتمي إلى A_{i_0}

و $x_1 \in A_{i_1}, x_2 \in A_{i_2}, \dots, x_{n_0-1} \in A_{i_{n_0-1}}$.

$$\Rightarrow k \subseteq A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_{n_0-1}}$$

٣- لتكن $k = [0,1]$ في $(R,|.|)$ هي مجموعة متراصّة وسيتم برهانها لاحقاً.

٤- لتكن $k =]0,1]$ في $(R,|.|)$ هي مجموعة <u>غير</u> متراصّة **<u>لأن</u>** إذا كان لدينا التغطية المفتوحة $\{Q_n =]\frac{1}{n}, 2[: n \in \mathbb{N}^*\}$ ل k ولدينا $k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Q_n$ لأن:

$$\forall x \in k =]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$$

$$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} < x < 2 \Rightarrow x \in \left]\frac{1}{n}, 2\right[\Rightarrow x \in \bigcup Q_n$$

لكن <u>لا</u> يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية منها للمجموعة k فلو فرضنا أن المجموعات $Q_{n_1}, Q_{n_2}, \dots, Q_{n_m}$ وكان $n = max\{n_1, \dots, n_m\}$

$$\Rightarrow n \geq n_i \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_i}$$

ونجد أن: $i = 1, \dots, m : Q_{n_i} \subseteq Q_n = \left]\frac{1}{n}, 2\right[$

$$\Rightarrow]0,1] = k \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} Q_{n_i} \subseteq Q_n =]\frac{1}{n}, 2[$$

ولكن هذا مستحيل و k غير متراصّة.

٥- في $(R, |.|)$ إن المجموعة R غير متراصّة. **لأنه** إذا كانت لدينا التغطية المفتوحة :

$$\{Q_n =]-n, n[: n \in \mathbb{N}^*\}$$

من الواضح أن:

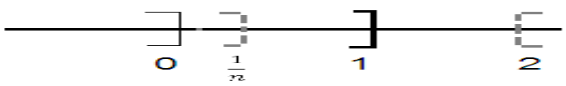
$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Q_n$$

لكن **لا** يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية منها للمجموعة R .

فلو كانت التغطية المنتهية $\{Q_{n_1}, Q_{n_2}, \dots, Q_{n_m}\}$ تحوي R فإن $R = Q_{n_1} \cup \dots \cup Q_{n_m}$

ولنأخذ $n = max\{n_1, \dots, n_m\}$

$$Q_{n_1} =]-n_1, n_1[\subseteq]-n, n[= Q_n \quad \Rightarrow Q_{n_m} \subseteq Q_n \ \Rightarrow R$$
$$\subseteq Q_{n_1} \cup Q_{n_2} \cup \dots \cup Q_{n_m} \subseteq Q_n =]-n, n[\ \Rightarrow R \subseteq]-n, n[$$



وهذا مستحيل فعليه تكون R غير متراصّة...😜

٦- في الفضاء المتري المتقطع (X, δ) إن X غير منتهية عندئذٍ X غير متراصّة.

❀ أخذنا في محاضرة سابقة ((كل مجموعة وحيدة العنصر في (X, δ) هي مجموعة مفتوحة $N\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$)).

لتكن لدينا التغطية المفتوحة $\{x\} : x \in X$ لـ X فإن:

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

لكن لا يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية منها.

فلو أخذنا: $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\} \ \Rightarrow X \subseteq \cup\{x_i\} = \{x_1, \dots, x_n\}$

لكن X غير منهية و هذا مستحيل.

Syria Math Team

حل بعض تمارين المحاضرة السابقة:

$$\boldsymbol{d(x,A)=0 \Leftrightarrow x\in \bar{A}}$$

الحل

" $\Leftarrow$ " لتكن $x\in\bar{A} \Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\,;N(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

$$\forall y\in A\cap N(x,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow y\in A\,,y\in N(x,\varepsilon)\ \Rightarrow y\in A\,,d(x,y)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 0\le d(x,A)\le d(x,y)<\varepsilon\quad ,y\in A$$

$$\Rightarrow 0\le d(x,A)<\varepsilon\ :\forall\varepsilon>0\ \Rightarrow inf\{d(x,a):a\in A\}=d(x,A)=0$$

" $\Rightarrow$ " ليكن $d(x,A)=0$ $\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\,;\exists a\in A:0\le d(x,a)<0+\varepsilon$

$$\varepsilon=1\Rightarrow a_1\in A:d(x,a_1)<1$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow a_2\in A:d(x,a_2)<\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon=\frac{1}{n}\Rightarrow a_n\in A:d(x,a_n)<\frac{1}{n}$$

إذاً لدينا $\{a_n\}$ متتالية من عناصر A حيث $d(x,a_n)<\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to 0} d(x,a_n)=0\Rightarrow a_n\to x$$

وبحسب مبرهنة سابقة إن x نقطة ملاصقة لـ A ومنه $x\in\bar{A}$.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو ☺ هديل سعيد ☺ هاله مصطفى

تنسيق: ولاء الأخضر♥