المحاضرة السابعة — / /

المورفيزمات الدالية

تعريف: لتكن $\mathcal{L}_1$ ، $\mathcal{L}_2$ فئتين و $F, G : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة
نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $f : F \to G$ من الدالي F إلى الدالي G
إذا كان: لأجل $\forall x \in ob(\mathcal{L})$
نعرف: $f(x) : F(x) \to G(x)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$
لأجل كل مورفيزم $u : A \to B$ للفئة $\mathcal{L}_1$ المخطط الآتي تبديلي $A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

يكون تبديلي أي أن: $G(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F(u)$

تعريف: لتكن $F, G : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال غير مباشرة.
نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $f : F \to G$ إذا كان لأجل $\forall x \in ob(\mathcal{L})$ نعرف $f(x) : F(x) \to G(x)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$
لأجل كل مورفيزم $u : A \to B$ للفئة $\mathcal{L}_1$ المخطط الآتي تبديلي $A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] & G(A) \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"'] \arrow[u, "F(u)"] & G(B) \arrow[u, "G(u)"'] \end{tikzcd}$$

يكون تبديلي أي أن $G(u) \cdot f(B) = f(A) \cdot F(u)$

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة لأجل كل مورفيزم $w : X \to X'$ للفئة $\mathcal{L}$ يوجد مورفيزم دالي $f : h_{X'} \to h_X$

البرهان: لنفرض أن $w : X \to X'$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ ومنه أي أن $X, X' \in ob(\mathcal{L})$
توجد دوال مباشرة $h_X, h_{X'} : \mathcal{L} \to Sets$

لنعرف $f: h_{X'} \longrightarrow h_X$ بالشكل الآتي $\forall Y \in ob(\mathcal{L})$ فإن:

$$f(Y): h_{X'}(Y) \longrightarrow h_X(Y)$$
$$f(Y): \mathcal{L}(X',Y) \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$$
$$\forall u \in \mathcal{L}(X',Y),\ \underline{f(Y)(u) = u.w} \longrightarrow$$

واضح أنه مورفيزم.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u.w"'] & X' \arrow[d, "u"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

ليكن $v: Y \longrightarrow Z$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ ولنثبت $f(Y) \in Mor(sets)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
h_{X'}(Y) \arrow[r, "f(Y)"] \arrow[d, "h_{X'}(v)"'] & h_X(Y) \arrow[d, "h_X(v)"] \\
h_{X'}(Z) \arrow[r, "f(Z)"'] & h_X(Z)
\end{tikzcd}$$

أي أنه:
$$h_X(v).f(Y) = f(Z).h_{X'}(v)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(X',Y) \arrow[r, "f(Y)"] \arrow[d, "h_{X'}^{*}(v)"'] & \mathcal{L}(X,Y) \arrow[d, "h_X(v)"] \\
\mathcal{L}(X',Z) \arrow[r, "f(Z)"'] & \mathcal{L}(X,Z)
\end{tikzcd}$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}(X',Y);\ h_X(v).f(Y)(\lambda) = h_X(v)\left(f(Y.\lambda)\right)$$
$$= h_X(v)(\lambda.w) = v.(\lambda.w)$$
$$f(Z)\,h_{X'}(v)(\lambda) = f(Z)\left(h_{X'}(v)(\lambda)\right)$$
$$= f(Z)\,(v.\lambda) = (v.\lambda).w$$
$$= v.(\lambda.w).$$

ومنه $h_X(v).f(Y) = f(Z).h_{X'}(v)$ محققة

وبالتالي f مورفيزم دالي.

التمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة لأجل كل مورفيزم $w: X \to X'$ للفئة $\mathcal{L}$ يوجد مورفيزم دالي

$$g: \hat{h}_X \to \hat{h}_{X'}$$

البرهان: لنفرض أن $w: X \to X'$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ ومنه إذا كان $X, X' \in ob(\mathcal{L})$ توجد دوال غير مباشرة

$$\hat{h}_X, \hat{h}_{X'} : \mathcal{L} \to sets$$

لنعرف $g: \hat{h}_X \to \hat{h}_{X'}$ بالشكل الآتي $\forall Y \in ob(\mathcal{L})$ فإن:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] & X' \\ Y \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "w.\mu"'] & \end{tikzcd}$$

$$g(Y): \hat{h}_X(Y) \to \hat{h}_{X'}(Y)$$

$$g(Y): \mathcal{L}(Y,X) \to \mathcal{L}(Y,X')$$

$$\forall \mu \in \mathcal{L}(Y,X);\ g(Y)(\mu) = w\mu$$

إن $g(Y)$ مورفيزم للفئة sets

ليكن $\alpha: Y \to Z$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd} \hat{h}_X(Y) \arrow[r] & \hat{h}_{X'}(Y) \\ h_X(Z) \arrow[u, "\hat{h}_X(\alpha)"] \arrow[r] & \hat{h}_{X'}(Z) \arrow[u, "\hat{h}_{X'}(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

أي أن:

$$\hat{h}_{X'}(\alpha)\, g(Z) = g(Y)\, \hat{h}_X(\alpha)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(Y,X) \arrow[r, "g(Y)"] & \mathcal{L}(Y,X') \\ \mathcal{L}(Z,X) \arrow[u, "\hat{h}_X(\alpha)"] \arrow[r, "g(Z)"'] & \mathcal{L}(Z,X') \arrow[u, "\hat{h}_{X'}(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

/ /

$\forall \lambda \in \mathcal{L}(Z,X)$; $\hat{h}_X(x)\, g(Z)(\lambda) = \hat{h}_X(x)(g(Z)(\lambda))$
$= \hat{h}_X(x)(w.\lambda) = (w.\lambda).x$

$g(Y).\hat{h}_X(x)(\lambda) = g(Y)(\hat{h}_X(x)(\lambda))$
$= g(Y)(\lambda.x) = w.(\lambda.x)$
$= (w.\lambda).x$

ومنه $\hat{h}_X(x) g(Z) = g(Y)\, \hat{h}_X(x)$ محققة
وبالتالي g مورفيزم دالي.

تعريف: ليكن $F, G : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دوال نقول عن المورفيزم التالي $f : F \longrightarrow G$ إنه ~~مورفيزم~~ دالي.
إذ مورفيزم

أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن $f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$
إذ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

مبرهنة: لتكن $F_1, F_2, F_3 : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دوال ولنفرض أن
$f : F_1 \longrightarrow F_3$ و $g : F_2 \longrightarrow F_3$ مورفيزمات دالية عندئذٍ
$g.f : F_1 \longrightarrow F_3$ المعرف بالشكل --- *
$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$; $(g.f)(A) = g(A).f(A)$
تركيب المورفيزمات بالفئة $\mathcal{L}_2$
عندئذٍ (*) مورفيزم دالي.

البرهان: لنفرض أن كلاً من $f : F_1 \longrightarrow F_2$ ، $g : F_2 \longrightarrow F_3$ مورفيزمات دالية

$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$: $f(A) : F_1(A) \longrightarrow F_2(A)$
$g(A) : F_2(A) \longrightarrow F_3(A)$
مورفيزمات للفئة $\mathcal{L}_2$
ومنه $g(A).f(A) : F_1(A) \longrightarrow F_3(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$
تحقق الشرط الأول من شرط المورفيزم

/ /

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة [illegible] لكل g, f مورفيزمات دالية فإن المخططات الآتية تبديلية:

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F_1(u)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(u)"] \\
F_1(B) \arrow[r, "f(B)"'] & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F_2(A) \arrow[r, "g(A)"] \arrow[d, "F_2(u)"'] & F_3(A) \arrow[d, "F_3(u)"] \\
F_2(B) \arrow[r, "g(B)"'] & F_3(B)
\end{tikzcd}$$

وحسب فرض

$$F_2(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F_1(u)$$

$$F_3(u) \cdot g(A) = g(B) \cdot F_2(u)$$

لنبرهن ان المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, "g \cdot f(A)"] \arrow[d, "F_1(u)"'] & F_3(A) \arrow[d, "F_3(u)"] \\
F_1(B) \arrow[r, "g \cdot f(B)"'] & F_3(B)
\end{tikzcd} \quad \text{- - - } (*)$$

مورفيزمات في الفئة L_2

$$F_3(u)\,(g \cdot f)(A) = F_3(u)\,(g(A) \cdot f(A))$$

$$= (F_3(u) \cdot g(A)) \cdot f(A)$$

$$= (g(B) \cdot F_2(u)) \cdot f(A)$$

$$= g(B) \cdot (F_2(u) \cdot f(A)) = g(B) \cdot (f(B) \cdot F_1(u))$$

$$= g(B)\, f(B))\ .\ F_1(u) = (g\, f)(B)\ .\ F_1(u)$$

ومنه فإن المخطط (*) ابدالي وبالتالي $g.f$ مورفيزم دالي

تمهيدية ١

ليكن $F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي

$I_F : F \longrightarrow F$ يسمى مورفيزم دالي مطابق

البرهان:

أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن

$$I_F(A) : F(A) \longrightarrow F(A) = I_{F(A)}$$

الشرط الأول محقق.

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "I_{F(A)}"] \arrow[d, "F(u)"'] & F(A) \arrow[d, "F(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "I_{F(B)}"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

$$F(u) . I_{F(A)} = F(u) . I_{F(A)}$$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[dr, "F(u)"'] & F(B) \arrow[d, "I_{F(B)}"] \\
 & F(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(u)"] & F(B) \\
F(A) \arrow[u, "I_{F(A)}"] \arrow[ur, "F(u)"'] &
\end{tikzcd}$$

ومنه فإن المخطط تبديلي و I_F مورفيزم دالي

انتهت المحاضرة