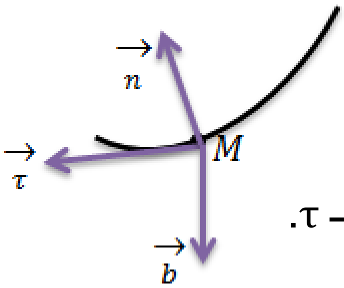
◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة السابعة عنوان المحاضرة : الحركة المقيدة بوجود احتكاك

بسم الله وبالله المستعان . . .لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي سنتناول حركة نقطة مادية بوجود احتكاك وأمثلة .

المعادلات الذاتية لحركة نقطة مادية على منحني



في هذه الحالة نعتبر أن المنحني الذي تتحرك عليه النقطة المادية لا يتغير مع مرور الزمن وبالتالي من الأسهل أن نأخذ جملة محاور مرتبطة بالنقطة نفسها وتتكون هذه الجملة من ثلاث محاور متعامدة مباشرة مبدؤها من النقطة المتحركة وتؤخذ على الشكل التالي :

المماس متجِه حسب الاتجاه الموجب للحركة، ونرمز لشعاع الواحدة على المماس بـــ τ.

الناظم الأساسي متجه حسب تقعر المسار، ونرمز لشعاع الواحدة على الناظم بـــ n.

((يتمم هذه المجموعة)) ثنائي الناظم الذي يتجه إلى خارج جهة تقعر المنحني ، ونرمز لشعاع الواحدة على ثنائي الناظم بـــ b.

مثال : لتكن M نقطة مادية كتلتها m وتخضع لقوة خارجية $\vec{F}$ ورد فعل $\vec{N}$ تتحرك على هذا المنحني

وبالتالي حسب قانون التحريك الأساسي: $m\vec{\Gamma} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{N}$

نعلم شعاع السرعة يكون محمولاً على المماس : $\vec{v} = v.\vec{\tau}$

نوجد التسارع من اشتقاق متجهة السرعة المحمولة على المماس :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \dots\dots (*)$$

نعلم أن : $\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$

حيثُ : $d\theta$ هي مقدار تغير زاوية المماس خلال الفترة الزمنية dt.

ds هي مقدار تغير قوس المسار خلال الفترة الزَمنية dt.

ونعلم أن $\frac{ds}{dt} = v \quad , \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad , \quad \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$

حيث : ρ هو نصف قطر تقوس المنحني

ونعوض العلاقات السابقة في $(*)$ فنجد :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + 0.\vec{b}$$

ملاحظة : للتسارع مركبتين على $\vec{\tau}, \vec{n}$ ومركبته على $\vec{b}$ معدومة

نعوض في قانون التحريك الأساسي $m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{N}$

فنجد... $m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$

بالإسقاط على $\vec{\tau}$ نجد

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau + 0 \ldots\ldots(1)$$

$N_\tau = 0$ لأن رد الفعل ناظمي مثالي ومسقطه على المماس (($\vec{\tau}$)) يساوي الصفر

F_τ قوة مماسية موجودة على مماس وتعاكس الحركة

بالإسقاط على $\vec{n}$ نجد

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \ldots\ldots(2)$$

بالإسقاط على $\vec{b}$ نجد

$$0 = F_b + N_b \ldots\ldots(3)$$

وهي عبارة عن معادلات ذاتية لحركة نقطة مادية على منحني ثابت لا تتغير مع مرور الزمن

نتائج : 1) المعادلة الأولى تعطينا قانون الحركة لنقطة مادية
2) المعادلة الثانية تعطي قانون رد الفعل المتعلق بالسرعة
3) المعادلة الثالثة تعطي رد الفعل المتعلق بالقوة .

نظرية الطاقة الحركية للنقطة المقيدة

يمكن معالجة النقطة المقيدة كنقطة طليقة فيما إذا اعتبرنا أن هنالكَ قوى أُخرى غير القوى الخارجية المطبقة على هذه النقطة كقوى ردود الأفعال وبناءً على ذلك يمكن ان نطبق جميع نظريات التحريك التي طبقت على حركة نقطة طليقة .

وبالتالي حسب نظرية الطاقة الحركية يكون لدينا :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + \lambda_1\, grad\, f_1.dr + \lambda_2\, grad\, f_2.dr$$

وبما أن :

$$grad\, f_1\, dr = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz$$
$$grad\, f_2\, dr = \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz$$

فإن معادلتي الارتباط $f_1(x,y,z,t)=0$ $f_2(x,y,z,t)=0$ تحقق هذه العلاقتين :

$$\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz}_{grad\ f_2 dr}+\frac{\partial f_1}{\partial t}dt=0\quad,\quad \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz}_{grad\ f_2 dr}+\frac{\partial f_2}{\partial t}dt=0$$

ومنه نجد أن :

$$grad\ f_1 dr=-\frac{\partial f_1}{\partial t}dt\quad,\quad grad\ f_2 dr=-\frac{\partial f_2}{\partial t}dt$$

نعوض في نظرية الطاقة الحركية فنحصل على :

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F.dr-\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t}dt-\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t}dt}$$

وهي معادلة نظرية الطاقة الحركية لنقطة مقيدة على منحني.

أمّا إذا كان الارتباط لا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن: $\frac{\partial f_2}{\partial t}=0\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial t}=0$

فتصبِحُ العلاقة على الشّكل التّالي: $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F.dr}$ وهيَ معادلة نظرية الطاقة الحركية لنقطة طليقة.

أي " إذا كان الارتباط لا يتعلق بشكل بالزمن بشكل مباشر فإن نظرية الطاقة الحركية تبقى محافظة على شكلها الذي نأخذه من أجل النقطة المادية الطليقة .

>> استنتج علاقة الطاقة الحركية لنقطة طليقة انطلاقاً من علاقة الطاقة الحركية لنقطة مقيدة >>

حركة نقطة مادية بوجود احتكاك

عند دراسة حركة نقطة مادية على منحني ثابت بوجود احتكاك فإن رد الفعل لن يكون ناظمياً على المنحني ((أي أن رد الفعل يصنع زاوية على المستوي الناظمي)) وتسمى بزاوية الاحتكاك.

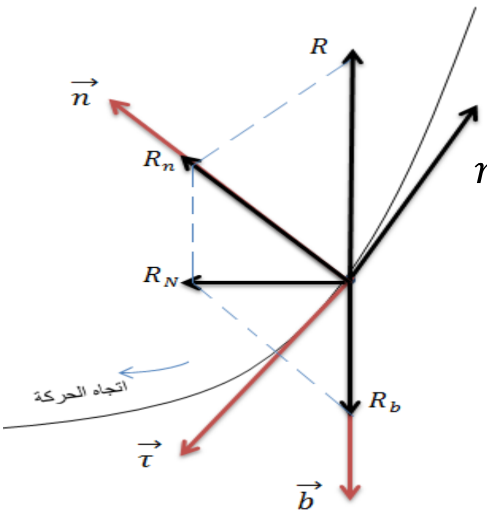
وبذلك يكون لرد الفعل مركبة مماسية R_τ محمولة على المماس وأخرى ناظمية R_N موجودة في المستوي الناظمي للمنحني في تلك النقطة .

ويمكن تفرق المركبة R_N إلى مركبتين $R_N=R_n+R_b$

حيث R_n على الناظم الأساسي و R_b محمولة على ثنائي الناظم.

وبالتالي حسب قانون التحريك الأساسي $m\,\vec{\Gamma}=\vec{F}\Longrightarrow m\,\vec{\Gamma}=\vec{F}+\vec{R}$

يكون لدينا بالإسقاط ...



بالإسقاط على $\vec{\tau}$ نجد $m\frac{dv}{dt}=F_\tau+R_\tau\ .....(1)$

بالإسقاط على $\vec{n}$ نجد $m\frac{v^2}{\rho}=F_n+R_n\ ......(2)$

بالإسقاط على $\vec{b}$ نجد $0=F_b+R_b\ ......(3)$

ملاحظة : عندما لا يوجد احتكاك $((\theta = 0))$ يكون رد الفعل ناظمي والمركبة المماسية تساوي الصفر.
أما عند وجود الاحتكاك تكون المركبة المماسية R_τ محمولة على المماس وتعاكسه باتجاه الحركة .
وتعطى بالقانون ... $R_\tau = -f|R_N|$

حيث : f عامل الاحتكاك ، وبالتالي $|R_N| = \sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

من المعادلة (2) نجد... $R_n = \frac{mv^2}{\rho} - F_n \Longrightarrow R_n^2 = \left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2$

من المعادلة (3) نجد... $R_b = -F_b \Longrightarrow R_b^2 = F_b^2$

نعوض بالمعادلة (1) فنجد...

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau - f\sqrt{\left(\dfrac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2} \\ \dfrac{mv^2}{\rho} = F_n + R_n \\ 0 = F_b + R_b \end{cases}$$

وهي معادلات الحركة في حالة منحنى ثابت وخشن (غير أملس)

ملاحظة : إذا كانت الحركة في المستوي نستخدم المعادلتين (1) و (2) .

مثال : M نقطة مادية تتحرك على المحور ox بحيث أن تسارعهما معين بالعلاقة $\Gamma = 6t - 12$
فإذا كانت M في لحظة البدء من مبدأ الفواصل وسرعتها تساوي 9 ، **أكتب المعادلة الزمنية للحركة** .

الحل

$$x'' = 6t - 12 \Longrightarrow x' = 3t^2 - 12t + c_1 \ldots (1)$$

لإيجاد الثابت c_1 من نص المسألة نجد شروط البدء $((\, t = 0 \,, x = 0 \,, x' = v = 9 \,))$ ومنه :

$$9 = 0 - 0 + c_1 \Longrightarrow c_1 = 9$$

بتعويض قيمة c_1 بالمعادلة (1) نجد :

$$x' = 3t^2 - 12t + 9 \Longrightarrow x = t^3 - 6t^2 + 9t + c_2$$

لإيجاد الثابت c_2 من نص المسألة نجد شروط البدء $((t = 0 \,, x = \,))$ ومنه نجد $c_2 = 0$
وبالتالي المعادلة الزمنية للحركة هي :

$$\boxed{x = t^3 - 6t^2 + 9t}$$

وظائف

المسألة الأولى : توجد حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري افقي نصف قطره a ،أُعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس فإذا علمت أن عامل الاحتكاك يساوي f فالمطلوب : تعيين المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف .

الحل

- لنأخذ مبدأ القياس موضع الحلقة لحظة البدء.
- القوى المؤثرة:
  - ✓ المقاومة R_τ التي جهتها بعكس اتجاه الحركة.
  - ✓ رد الفعل الناظمي R_N الواقع في المستوي النظامي.
  - ✓ قوة الثقل $P = mg$

في هذه الحالة بإسقاط علاقة التحريك الأساسي نحصل على المعادلات الذاتية لحركة الحلقة:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -R_\tau \quad , \quad m\frac{v^2}{\rho} = R_n \quad , \quad 0 = R_b - P}$$

بما أن : $\qquad R_\tau = f|R_N| = f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

لدينا من المعادلات الذاتية: $R_n = m\frac{v^2}{\rho}$ و $R_b = P = mg$

$$\Rightarrow R_\tau = mf\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + g^2} \Rightarrow R_\tau = \frac{mf}{a}\sqrt{v^4 + a^2g^2}$$

حيث أن نصف قطر تقوس الدائرة يساوي a ، ومن أجل المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف نكتب الطرف الأيسر بالاعتماد على المعادلات الذاتية بالشكل :

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{ds}v = -\frac{mf}{a}\sqrt{v^4 + a^2g^2}$$

بتقسيم الطرفين على m :

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{f}{a}\sqrt{v^4 + a^2g^2}$$

بفصل المتحولات :

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv^2}{\sqrt{v^4 + a^2g^2}} = -\frac{2f}{a}\int_0^s ds$$

ملاحظة هامة تكامل شهير :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arcsh}\left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2} + c)$$

نبدل كل $a = ag$, $x = v^2$ من الملاحظة ونطبقها فنجد :

$$\frac{a}{2f}\int \frac{dx}{\sqrt{v^2+a^2g^2}} = -\frac{a}{2f}\ln\left(v + \sqrt{v^2+a^2g^2}\right)$$

لكن لدينا هنا التكامل محدود وبما أنه سالب نقلب حدود التكامل فتصبح :

$$\frac{a}{2f}\left[\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2g^2}\right)\right]_v^{v_0} = \frac{a}{2f}\ln\left(v_0 + \sqrt{v_0^2+a^2g^2}\right) - \ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2g^2}\right)$$

وحسب خواص اللوغاريتم نجد :

$$\Longrightarrow s = \frac{a}{2f} ln \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4+a^2g^2}}{v^2+\sqrt{v^4+a^2g^2}}$$

وفي لحظة توقف الحلقة عن الحركة يكون لدينا $v = 0$ وبالتالي نجد أن المسافة المطلوبة :

$$\boxed{s^* = \frac{a}{2f} ln \frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+a^2g^2}}{ag}}$$

المسألة الثانية : يتحرك جسم A شاقولياً نحو الأسفل ضمن أنبوب من موضوع D وسرعة ثابتة مقدارها لا يرتبط بهذا الجسم خيط طوله L يمر على بكرة (o) موجودة على بعد مقداره a عند D ويعلق في الطرف الثاني للخيط الثقل B الذي يتحرك شاقولياً أيضاً ، أوجد سرعة وتسارع الثقل B تابع المسافة S الذي يقطعها الجسم A .

" سيتم حلها في المحاضرات القادمة ان شاء الله "

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** راما جوهر ** عبير خزنة كاتبي