/ /

30/4/2018 الاثنين — المحاضرة 13

النوع الثاني :

النموذج السكوني لمادة واحدة مع قبول عجز في المخزون .

يستخدم هذا النموذج لتخزين بعض المواد القابلة للعطب أو الفساد مثل الاسمنت والحديد ويحدث العجز في المخزون عندما يكون حجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية أقل من حجم الطلب على المادة المخزنة خلال تلك الدورة لذلك فإنه لمعالجة هذه الحالة نضيف إلى الفرضيات الأساسية السابقة فرضية جديدة نذكرها فيما يلي :

أولاً :

الفرضيات الأساسية لهذا النموذج :

1- حجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية ونرمز له بالرمز R .

2- حجم الطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة تخزينية بالرمز Q .

3- الطلب على المخزون مستمر وبمعدل ثابت قدره λ خلال واحدة الزمن .

4- التكلفة الثابتة لإعداد الطلبية هي $C_1 = K$.

5- تكلفة الشراء والتوصيل والاستلام هي $C_2 = C.Q$.

6- تكلفة التخزين خلال واحدة الزمن للكمية المتبقية في المستودع ونرمز لها بالرمز C_3 وهي مقدار h للوحدة الواحدة .

7- مقدار العجز المسموح به في كل دورة تخزينية يساوي مقداراً ثابتاً S وتكلفة العجز تبلغ P لكل واحدة من الطلب الغير محقق خلال واحدة الزمن .

مدة نفاذ الكمية المخزنة تساوي $\frac{R}{\lambda}$ وذلك لأن حجم الطلب في واحدة الزمن هو λ أما مدة الدورة التخزينية هي $\frac{Q}{\lambda}$.

ثانياً :

صياغة النموذج الرياضي الذي نستطيع من خلاله إيجاد الحجم المثالي للمخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية والذي رمزنا له بـ R ولإيجاد الحجم المثالي للطلبية Q :

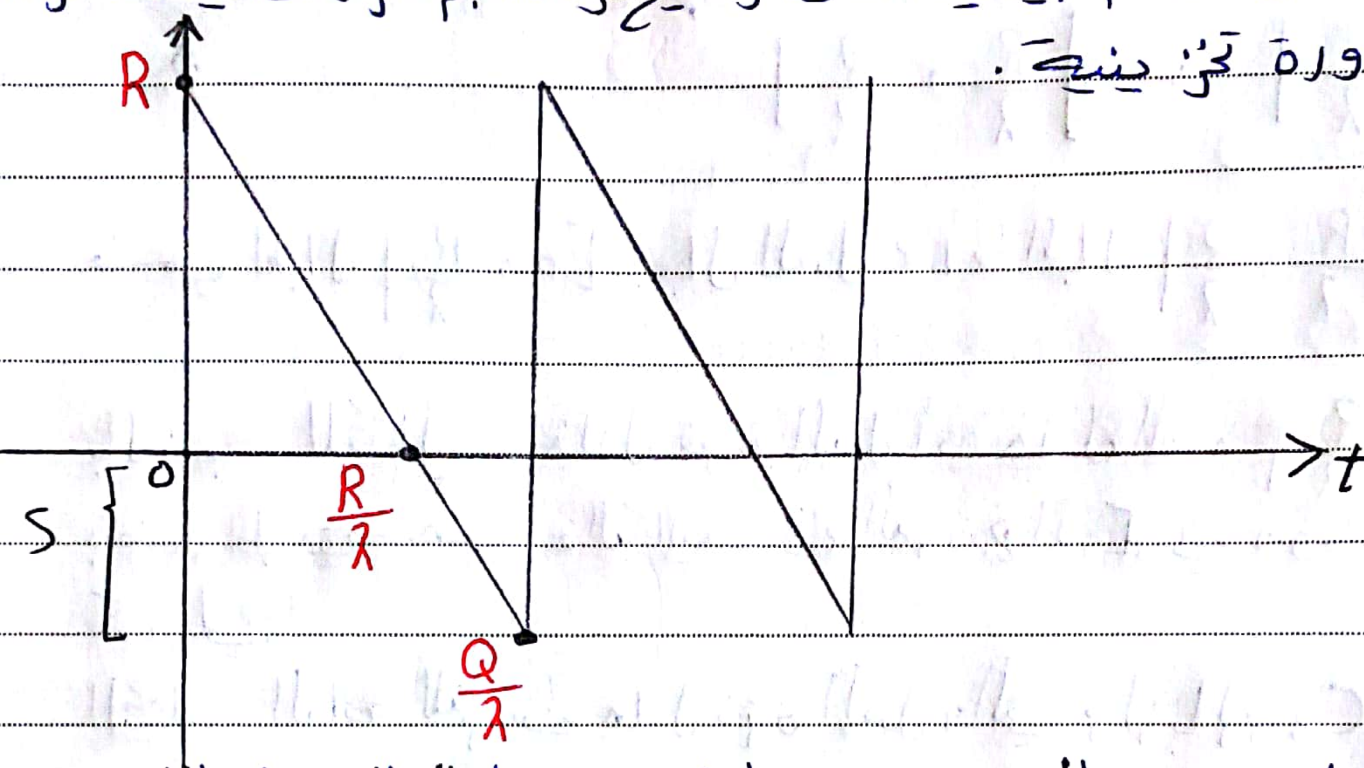
بما أننا رمزنا بـ R لحجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية ورمز Q لحجم

الطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة تخزينية فوضوها $R < Q$ ناتجة عن العجز

وكون رمز نا لمقدار العجز المسموح به بالرمز S فيكون :

$$S = Q - R$$

ويمكن من خلال الرسم البياني الآتي توضيح حركة حجم المخزون في المستودع خلال كل دورة تخزينية .



بحسب فرضيات هذا النموذج وضعنا λ هي معدل الطلب على المادة في واحدة الزمن فإننا نلاحظ أن حجم المخزون المتوفر R مرتبط بالزمن بواسطة معادلة المستقيم :

$$q(t) = R - \lambda t \quad --- (1)$$

إضافي :

إيجاد معادلة المستقيم (1) يعني إيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, R)$ و $(\frac{R}{\lambda}, 0)$ وبالتالي تكون معادلة المستقيم المطلوبة هي :

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

لكن نرمز لـ y بالرمز q وهو التابع أما المتحول هو t الزمن بدلاً من x و $(x_0, y_0) = (0, R)$ أما بالنسبة لميل هذا المستقيم أي m فيعطى بالشكل :

$$(q - R) = -\lambda(t - 0) \Longrightarrow q(t) = R - \lambda t$$

وهي معادلة المستقيم (1)

إن مدة نفاذ المخزون هي $\frac{R}{\lambda}$ ومدة الدورة التخزينية هي $\frac{Q}{\lambda}$

ونتيجة العجز يكون $\frac{R}{\lambda} < \frac{Q}{\lambda}$ وبذلك نستطيع تجزئة المجال $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ إلى اجتماع مجالين جزئيين هما:

$$[0, \frac{R}{\lambda}] \quad , \quad]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}]$$

نسمي المجال $[0, \frac{R}{\lambda}]$ بمجال العمل، أما المجال $]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}]$ فندعوه بمجال العجز.

* بالنسبة للتكاليف خلال فترة العمل أي خلال الفترة $[0, \frac{R}{\lambda}]$ يتم حسابها بنفس طريقة حساب التكاليف في النموذج السكوني دون قبول عجز وتعطى كما يلي:

التكلفة العامة للتخزين خلال فترة العمل والتي نرمز لها بالرمز C_3 هي:

$$C_3 = \int_0^{\frac{R}{\lambda}} h.(R-ht)\,dt = \frac{hR^2}{2\lambda}$$

* أما بالنسبة لتكاليف التخزين خلال فترة العجز أي خلال الفترة $]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}]$ فيتم حسابها من جديد ونرمز لهذه التكاليف بالرمز C_4

مع ملاحظة الرسم البياني السابق فإنها تعطى بالعلاقة:

$$C_4 = (-1)\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}} p(R-\lambda t)\,dt = -\left[pRt - \frac{p\lambda t^2}{2}\right]_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}}$$

$$= -\left[\left(pR\left(\frac{Q}{\lambda}\right) - \frac{p\lambda}{2}\left(\frac{Q}{\lambda}\right)^2\right) - \left(pR\left(\frac{R}{\lambda}\right) - \frac{p\lambda}{2}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{PRQ}{\lambda} - \frac{PQ^2}{2\lambda} - \frac{PR^2}{\lambda} + \frac{PR^2}{2\lambda}\right]$$

$$= \frac{PQ^2}{2\lambda} - \frac{PRQ}{\lambda} + \frac{PR^2}{2\lambda}$$

$$= \underbrace{\frac{P}{2\lambda}}_{\text{بسحب } \frac{P}{2\lambda} \text{ عامل مشترك}} \left(Q^2 - 2RQ + R^2\right) = \frac{P}{2\lambda}(Q-R)^2$$

$$\Longrightarrow \quad C_4 = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

وبشكل عام نجد أن إجمالي تكاليف التخزين في حالة النموذج الساكن مع عجز يساوي إلى تكاليف الطلبية C_1 مضافاً لذلك تكاليف الشراء C_2 ومضافاً لذلك تكاليف التخزين خلال فترة العمل C_3 ومضافاً لذلك تكاليف العجز C_4 وحيث أن:

$$\underbrace{C_1 = K}_{\text{من الفرضيات}} \quad , \quad \underbrace{C_2 = C \cdot Q}_{\text{من الفرضيات}} \quad , \quad \underbrace{C_3 = \frac{hR^2}{2\lambda}}_{\text{تم حسابها سابقاً}} \quad , \quad \underbrace{C_4 = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}}_{\text{تم حسابها سابقاً}}$$

- أي أن إجمالي تكاليف التخزين في حالة النموذج الساكن مع عجز ولمادة واحدة هي:

$$T_C(Q,R) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$= K + C \cdot Q + \frac{hR^2}{2\lambda} + \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

- ولحساب تكلفة التخزين خلال واحدة الزمن نقسم $T_C(Q,R)$ على طول الفترة أي على $\frac{Q}{\lambda}$ ونرمز للناتج بالرمز $C(Q,R)$ فيكون:

$$C(Q,R) = \frac{T_C(Q,R)}{Q/\lambda} = \frac{K + C \cdot Q + \frac{hR^2}{2\lambda} + \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}}{Q/\lambda}$$

$$= \frac{K\lambda}{Q} + C\lambda + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

$$\Longrightarrow C(Q,R) = \frac{k\lambda}{Q} + c\lambda + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

الآن لإيجاد حجم الطلبية المثالي Q^* وكذلك R^* واللذان يجعلان $C(Q,R)$ أصغر ما يمكن نقوم بتطبيق نماذج البرمجة اللاخطية وذلك وفق النموذج الرياضي الآتي:

$$L = C(Q,R) \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$Q > R$$

$$Q > 0 \; , R > 0$$

وهو النموذج الرياضي المطلوب.

ثالثاً:

إيجاد الحجم المثالي للمخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية R^* والحجم المثالي للطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة تخزينية Q^* وبحيث تجعلان تكاليف التخزين أقل ما يمكن

لإيجاد الحجم المثالي لـ Q و R أي لإيجاد Q^* و R^* بحيث تكون التكلفة الإجمالية للتخزين خلال واحدة الزمن أصغر ما يمكن نقوم باشتقاق التابع $C(Q,R)$ جزئياً بالنسبة لـ Q ونعدم الناتج ومن ثم نشتقه جزئياً بالنسبة لـ R ونعدم الناتج كما يلي:

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{k\lambda}{Q} + c\lambda + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}\right)$$

$$= -\frac{k\lambda}{Q^2} - \frac{hR^2}{2Q^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2p(Q-R)(Q) - p(Q-R)^2}{Q^2}\right]$$

$$= -\frac{k\lambda}{Q^2} - \frac{hR^2}{2Q^2} + \frac{1}{2}p(Q-R)\left[\frac{2Q-(Q-R)}{Q^2}\right]$$

$$= -\frac{k\lambda}{Q^2} - \frac{hR^2}{2Q^2} + \frac{1}{2}p(Q-R)\left[\frac{Q+R}{Q^2}\right]$$

$$= \frac{-k\lambda}{Q^2} - \frac{hR^2}{2Q^2} + \frac{P(Q+R)(Q-R)}{2Q^2}$$

وبعدم هذا المشتق نحصل على:

$$-\frac{k\lambda}{Q^2} - \frac{hR^2}{2Q^2} + \frac{P(Q+R)(Q-R)}{2Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow -k\lambda - \frac{1}{2}hR^2 + \frac{1}{2}P(Q+R)(Q-R) = 0 \quad ---(1)$$

الآن باشتقاق $C(Q,R)$ جزئياً بالنسبة لـ R فنجد أن:

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{k\lambda}{Q} + C\lambda + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}\right)$$

$$= \frac{hR}{Q} + \frac{P}{2Q}[-2(Q-R)] = \frac{hR}{Q} - \frac{P(Q-R)}{Q}$$

وبعدم هذا المشتق نحصل على:

$$\frac{hR}{Q} - \frac{P(Q-R)}{Q} = 0 \Rightarrow hR - P(Q-R) = 0 \quad ---(2)$$

الآن لنقوم بحل جملة المعادلتين (1) و (2) وذلك للحصول على Q^* و R^*

من (2) نجد أن:

$$P(Q-R) = hR \quad ---*$$

ومن * يمكن أن نحصل على:

$$Q + R = \frac{hR}{P} + 2R = R\left(\frac{h+2P}{P}\right) \quad ---**$$

بتعويض * و ** في (1) نجد أن:

$$-k\lambda - \frac{1}{2}hR^2 + \frac{1}{2}R\left(\frac{h+2P}{P}\right)hR = 0$$

$$\Rightarrow -k\lambda - \frac{1}{2}hR^2 + \frac{1}{2}hR^2\left(\frac{h+2P}{P}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow -k\lambda + \frac{1}{2} h R^2 \left[\frac{h+2p}{p} - 1 \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} h R^2 \left[\frac{h+p}{p} \right] = k\lambda$$

$$\Longrightarrow R^2 = \frac{2k\lambda}{h\left(\frac{h+p}{p}\right)} \Longrightarrow R^2 = \left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)$$

بجذر الطرفين

$$\Longrightarrow R^* = \mp \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)}$$

نرفض القيمة السالبة لأن R تمثل كمية فهي لا تكون سالبة وبالتالي يكون :

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)}$$

نعوض R^* في (2) لنحصل على Q^* فنجد أن :

$$p\left(Q^* - \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)}\right) = h\sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)}$$

$$\Longrightarrow Q^* = \frac{h}{p}\sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)} + \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)} \cdot \left(\frac{h}{p} + 1\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{h+p}\right)} \cdot \left(\frac{h+p}{p}\right) = \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\left(\frac{h+p}{p}\right)\right)}$$

$$\Longrightarrow Q^* = \sqrt{\left(\frac{2k\lambda}{h}\right)\left(\frac{h+p}{p}\right)}$$

وبهذا الفعل نكون قد حصلنا على Q^* و R^* ونلاحظ أن:

$$Q^* = \frac{h+P}{P} R^* \Longrightarrow Q^* \geq R^*$$

وذلك كون $\frac{h+P}{P} > 1$ وكون $h>0$

- مما يعني أن الحلين المثاليين يحافظان على الشرط الأساسي وهو $Q>R$

من أجل إثبات أن الحل الناتج يقابل قيمة أصغرية للتابع $C(Q,R)$ نقوم بحساب مصفوفة هيسيان له وسوف نلاحظ أنها متناظرة وأن عناصرها القطرية موجبة وأن محدداتها الأساسية الرئيسية غير سالبة أي أن المصفوفة معرفة موجبة وبالتالي فإن التابع تابع محدب. والقيد خطي فهو تابع محدب وعليه فإن القيمة هي قيمة أصغرية ويكون الحجم المثالي للمخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية هو:

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{2K\lambda}{h}\right)\left(\frac{P}{h+P}\right)}$$

والحجم المثالي للطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة هو:

$$Q^* = \sqrt{\left(\frac{2K\lambda}{h}\right)\left(\frac{h+P}{P}\right)}$$

وتكون تكلفة التخزين الأصغرية هي:

$$C(Q^*, R^*) = \frac{\lambda K}{Q^*} + C.\lambda + \frac{h.R^{*2}}{2Q^{*2}} + \frac{P(Q^*-R^*)^2}{2Q^*}$$

انتهى

Alamal