نظري

◀ دكتور المادة: هدى شماط

◀ المحاضرة: السابعة　　　　عنوان المحاضرة: الفضاءات

المحتوى العلمي :

١- سنقوم بحل تمارين الوظيفة

٢- سنتعرف على مشتقات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

٣- بعض التمارين ومبرهنات

حل تمرين الوظيفة:

لتكن $g: \mathbb{R}^2\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ والمعرفة بـ:

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

أثبت أنه لا توجد نهاية للدالة g في $(0,0)$

الحل: لنأخذ المتتاليتين :

$$1-)\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\to\infty} \to (0,0)$$

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)_{n\to\infty} = 0 \to 0$$

$$2-)\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right\}_{n\to\infty} \to (0,0)$$

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)_{n\to\infty} = \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{-3}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$$

أي أن ليس للدالة نهاية .

مثال :

لتكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ والمعرفة بـ:

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

برهن أن f مستمرة على كل مستقيم مار من مبدأ الاحداثيات دون أن تكون مستمرة في تلك النقطة

الحل: معادلة مستقيم مار من مبدأ الإحداثيات $(0,0)$: $y = \alpha\, x$ إذا

$$f(x,\alpha\, x) = \frac{\alpha^2 x^3}{x^2+\alpha^4 x^4} = \frac{\alpha^2 x}{(1+\alpha^4 x^2)} = \lim_{x\to 0} f(x,\alpha\, x) = 0 = f(0,0)$$

حيث $(0,0)$ نقطة حدية . إذن من أجل $x = y^2$ نجد أن :

$$f(x,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0} f(y) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

إذا f غير مستمرة عند $(0,0)$.

مشتقات الدوال الحقيقة التابعة لعدة متغيرات:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة ولتكن $c \in D^{\circ}$ (نقطة حدية)
حيث $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ فإذا وجدت النهاية التالية:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, c_3 \dots \dots, c_n) - f(c_1, c_2, c_3 \dots \dots . c_n)}{h}$$

عندئذ نقول أن للدالة مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول في النقطة c، ونرمز له بـ
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$ أو $f_{x_1}(c)$.

وكذلك الأمر إن المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير الثاني يعطى بـالشكل::

$$f_{x_2}(c)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c_1,c_2+h,c_3\dots\dots,c_n)-f(c_1,c_2,c_3\dots\dots.c_n)}{h}$$

وهكذا....حتى نصل إلى المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير الأخير و الذي يعطى بالشكل :

$$f_{x_n}(c)=\frac{\partial f}{\partial x_n}(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c_1,c_2,c_3\dots\dots,c_n+h)-f(c_1,c_2,c_3\dots\dots.c_n)}{h}$$

و بذلك نحصل على n مشتقاً جزئياً للدالة f في النقطة c ندعوها **المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى.**

- لنفرق دالة المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:D^\circ\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$c\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

ولنأخذ (مثلاً $i=1$ و كل ما سنطبقه ينطبق من أجل جميع $1\le i\le n$) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}:D^\circ\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$c\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)\underset{\text{أو}}{=}f_{x_1}(c)$$

ولنحسب مشتقه الجزئية بالنسبة للمتحول الأول ثم للثاني :

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_{x_1}(c_1+h,c_2,c_3\dots\dots,c_n)-f_{x_1}(c_1,c_2,c_3\dots\dots.c_n)}{h}$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(c)$$

$$=\lim_{x\to h}\frac{f_{x_1}(c_1,c_2+h,c_3\dots\dots,c_n)-f_{x_1}(c_1,c_2,c_3\dots\dots.c_n)}{h}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}f_{x_1}=\left(f_{x_1}\right)_{x_2}=f_{x_1x_2}}$$

يجب هنا الانتباه لترتيب الرموز ففي الحالة العامة يوجد فرق بين أن نشتق أولاً بالنسبة لـ x_1 و من ثم بالنسبة لـ x_2 و بين العكس

تعريف المشتقات الجزئية الصرفة والمختلطة من المرتبة m:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ و D مجموعة مفتوحة و $c \in D^{\circ}$ ولتكن المشتقات الجزئية الصرفة والمختلطة من المرتبة k التالية:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2}\partial y^2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^m f}{\partial x\, y^{m-1}}, \frac{\partial^m f}{\partial y^m}$$

*إنّ المشتقات الجزئية الصرفة هي التي تحوي اشتقاقاً بالنسبة لمتغيرٍ واحدٍ فقط:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}, \frac{\partial^m f}{\partial y^m}$$

*أما المشتقات الجزئية المختلطة فهي التي تحوي اشتقاقاً بالنسبة الى اكثر من متغيرٍ واحد مثل:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2}\partial y^2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^m f}{\partial x\, y^{m-1}}$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الصرفة والمختلطة للدالة:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 y^5$$

الحل: (عند إيجاد f_x نشتق f اشتقاقاً عادياً بالنسبة لـ x ونعتبر y ثابتاً)

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^5 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^3y^4$$

$$f_{xx} = 6xy^5 \qquad f_{yy} = 20x^3y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 15x^2y^4 \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 15x^2y^4$$

هنا المشتقات المختلطة كانت متساوية و هذا لا يتحقق دوماً و سنرى ذلك في المثال التالي:

مثال: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

أوجد $f_y(x,y)$, $f_x(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$

الحل: بما أن الدالة المعطاة ذات فروع فلحساب المشتقات عند النقطة $(0,0)$ لا بد من استخدام التعريف (النهاية) أما عند كل نقطة (x,y) مغايرة لـ $(0,0)$ يمكن الاشتقاق مباشرةً :

فلحساب $f_x(0,0)$ نطبق مفهوم النهاية

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

و لحساب $f_x(x,y)$ حيث $(x,y) \neq (0,0)$ فيمكن الاشتقاق مباشرةً:

$$f_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

و هو المشتق من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x

و بنفس الأسلوب نجد أن :

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الآن لنحسب المشتقات المختلطة عند النقطة $(0,0)$:

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0+h,0)-f_x(0,0)}{h} = \frac{1-0}{h} = \infty$$

نلاحظ أن $f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$.

مبرهنة(دون برهان):

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة ولتكن $c \in D^\circ$ و لنفرض تحقق الشرطين:

١) $f_{yx}(c)$, $f_{xy}(c)$, $f_x(c)$, $f_y(c)$ موجودة على الساحة D.

٢) المشتقات الجزئية المختلطة f_{yx} ، f_{xy} مستمرة في النقطة c.

عندها يكون : $\boxed{f_{xy}(c) = f_{yx}(c)}$

مبرهنة (تعميم) :

لتكن الدالة $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة.

ولتكن $c \in D^{\circ}$

أولاً: إن المشتقات الجزئية الصرفة حتى المرتبة $m-1$ (بما فيها $m-1$)موجودة في المنطقة D

ثانياً: المشتقات الجزئية المختلطة حتى المرتبة m موجودة ومستمرة عند النقطة c،(m مرتبة الاشتقاق)

عندئذٍ تكون قيمة أي مشتق جزئي مختلط في النقطة c مستقل عن الترتيب الذي نجري به عمليات الاشتقاق.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب