نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :العاشرة عنوان المحاضرة: تكامل ريمان

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. تكملة لتكامل ريمان
2. بعض تمارين
3. حل الوظائف لهذه المحاضرة

مراجعة لما أخذناه في المحاضرة السابقة:

مجموع ريمان:

اذا كانت f دالة معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ لنأخذ التجزئة على المجال $[a,b]$ و لتكن

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$$

و منه يكو مجموع ريمان هو:

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k \ : \ \Delta \mathrm{x_k}=x_k-x_{k-1} \text{ و } x_{k-1}\le t_k\le x_k$$

تعريف التكامل:

اذا كانت f دالة معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ لنأخذ التجزئة على المجال $[a,b]$ و لتكن

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$$

نقول عن f انه كمول (قابل للتكامل) على المجال $[a,b]$ اذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k \ : \ \Delta \mathrm{x}=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k$$

ملاحظة: اذا كانت التجزئة منتظمة أي أن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ فإن:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x \quad \text{او} \quad A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x$$

و كلاهما يساوي $A = \int_a^b f(x)dx$

تعريف التكامل باستخدام ϵ (ابسيلن):

نقول عن f أنه قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ اذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon : P \supset P_\epsilon \Longrightarrow |S(f,P) - A| < \epsilon$$

تعريف التكامل بالنسبة ل δ ,ϵ:

نقول عن f أنها كمولة (قابلة للمكاملة) على المجال $[a,b]$ إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists \delta_\epsilon > 0 \,, \Delta P < \delta_\epsilon \Longrightarrow |S(f,P) - A| < \epsilon$$

حساب تكامل ريمان من التعريف:

مثال: $x \in [0,3] \;:\; f(x) = x^2 + 1 : I = \int_0^3 (x^2+1)\; dx$

لنأخذ التجزئة أولا حتى نستطيع استخدام مجموع ريمان و لتكن التجزئة المنتظمة:

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 3\}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x_k$$

حيث نلاحظ: $x_0 = 0 \,, x_1 = 0 + \Delta x = \frac{3}{n} \,, x_2 = 0 + x_1 + \Delta x = \frac{6}{n} \ldots \ldots \ldots$

$$x_n = 0 + n\Delta x = n\frac{3}{n} = 3$$

ولنأخذ مجموع ريمان: $S(f,P) = [x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 + \cdots + x_n^2 + 1]\frac{3}{n}$

$$S(f,P) = \left[n + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{3}{n}\right)^2 + 3^2\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + n^2\left(\frac{3}{n}\right)^2\right]\frac{3}{n}$$

و بإدخال $\frac{3}{n}$ لداخل القوس و إخراج $\frac{3}{n}.\left(\frac{3}{n}\right)^2$ عامل مشترك نجد أن :

$$S(f,P) = 3 + \frac{3}{n}.\left(\frac{3}{n}\right)^2 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2]$$

$$S(f,P) = 3 + \frac{27}{n^3}.\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S(f,P) = 3 + \frac{9}{2n^2}(n+1)(2n+1) = 3 + \frac{9(2n^2+3n+1)}{2n^2}$$

و منه فإن A تكون $A = \lim_{n\to\infty} S(f,P) \Longrightarrow \; A = 3 + 9 = 12$

الوظائف:

1. $\int_1^3 (x+1)\,dx$
2. $\int_0^2 (x+1)\,dx$
3. $\int_0^3 x^2\,dx$

شروط وجود تكامل ريمان:

1- اذا كانت f معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ فإن f كمولة اذا و فقط اذا تحقق الشرط

$$\lim_{\Delta x\to 0}(U - L) = 0$$

كمولةf $\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}(U-L) = 0$ حيث f معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$

2- إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$

خواص تكامل ريمان:

لتكن f و g دوال قابلة للمكاملة على $[a,b]$ حيث $a < b$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن :

$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha[b-a]$ (1

$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ (2

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (3

$\int_a^a f(x)dx = 0$ (4

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ (5 حيث f دالة زوجية أي $f(-x) = f(x)$

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (6 حيث f دالة فردية أي $f(-x) = -f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx : a < c < b$ (7

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \ : \ F'(x) = f(x)$ (8

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ (9

(10 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(11 $f(x) \le g(x): x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)dx$

(12 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

حيث $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)\ , m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$

(13 نظرية القيمة الوسطى

$$\exists c \in [a,b]: \int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{f(c)}[b-a]$$

(14 نظرية القيمة الوسطى العامة:

ليكن f , g دالتين مستمرتين على $[a,b]$ و $g(x)$ لا يغير إشارته على $[a,b]$

$$\exists c \in [a,b]: \int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

(15 من 12 و 14 نجد:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x).g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

حيث $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)\ , m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$

حل وظائف هذه المحاضرة:

-1 $I=\int_1^3 (x+1)\,dx$ حيث $f(x)=x+1$ و $x\in[1,3]$

لنأخذ التجزئة النونية للمجال $[1,3]$ حيث $\Delta x=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$

$$P=\{x_0=1<x_1<x_2<\cdots<x_n=3\}$$

$$x_1=1+\frac{2}{n}\ ,x_2=1+2\left(\frac{2}{n}\right),\ldots\ ,x_n=1+n\left(\frac{2}{n}\right)$$

و منه لنأخذ مجموع ريمان $S(f,P)=[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].\frac{2}{n}$

$$S(f,P)=[x_1+1+x_2+1+\cdots+x_n+1].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P)=[x_1+x_2+\cdots+x_n+n].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P)=\left[1+\frac{2}{n}+1+2\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+1+n\left(\frac{2}{n}\right)+n\right].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P)=\left[n+n+\frac{2}{n}(1+2+3+4+\cdots+n)\right].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P)=\left[2n+\frac{2}{n}\frac{n.(n+1)}{2}\right].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P)=4+\frac{2(n+1)}{n}\rightarrow A=\lim_{n\to\infty}S(f.P)=6$$

و نقوم بحل باقي الوظائف بنفس الطريقة تماما (تترك للقارئ).

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

0,1,2,4,6,9,12,16,?

أي رقم يجب أن يحل محل علامة الاستفهام ؟

الجواب سيكون في المحاضرة القادمة مع اختبار ذكاء أخر ☺