نظري

◄ دكتور المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: الخامسة عشر　　　عنوان المحاضرة : تمرين

مثال :

لتكن
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
بحيث
$$f(x,y)=\ y^2+x^2y+x^4$$
أثبت أن $(0,0)$ نقطة حرجة ثم أدرس فيما إذا كانت قيمة صغرى(قصوى) نسبية أم لا ؟.

الحل :

لنوجد $f_x\,,f_y$ ونعوض النقطة في المعادلات :
$$f_x(x,y)=2xy+4x^3\Longrightarrow f_x(0,0)=0$$
$$f_y(x,y)=2y+x^2\Longrightarrow f_y(0,0)=0$$
$\Leftarrow$ $(0,0)$ **حرجة .**

لدراسة فيما إذا كانت النقطة قصوى صغرى أم لا نلجأ إلى المبرهنة ونوجد المحددات
$$f_{xx}(x,y)=2y+12x^2\Longrightarrow f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{yy}(x,y)=2\Longrightarrow,f_{yy}(0,0)=2$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(y,x)=2\text{x}\Longrightarrow f_{xy}\&f_{xy}(0,0)=0$$
$$\Longrightarrow\Delta_1=f_{xx}(0,0)=0$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}=0$$
نلاحظ أن :
$$f(x,y)=\ y^2+x^2y+x^4$$
$$\Delta=x^4-4x^4=-3x^4<0$$
إشارة الدالة من إشارة أمثال y^2 أي أنها موجبة دوماً أي :
$$f(x,y)\geq0=f(0,0)\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}$$
ومنه $(0,0)$ قيمة صغرى نسبية بل صغرى مطلقة

تمرين :

أوجد النقاط الحرجة ثم حدد فيما إذا كانت قيم قصوى نسبية أم لا للدالة:
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$f(x,y)=e^{x^2+y^2}$$
الحل:
$$\boldsymbol{f_x(x,y)=2xe^{x^2+y^2}=0\Rightarrow x=0}$$

$$f_y(x,y)=2ye^{x^2+y^2}=0\Rightarrow y=0$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f .

لنوجد Δ_1,Δ_2 :

$$f_{xx}(x,y)=2e^{x^2+y^2}+(2x)^2e^{x^2+y^2}$$
$$f_{yy}(x,y)=2e^{x^2+y^2}+(2y)^2e^{x^2+y^2}$$
$$f_{xy}(x,y)=4xye^{x^2+y^2}=f_{yx}(x,y)$$
$$\Delta_1=f_{xx}(0,0)=2>0$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0)\\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$$
$$\Delta_1>0,\Delta_2>0$$

ومنه $(0,0)$ هي نقطة صغرى نسبياً. أيضاً لدينا $x^2+y^2\geq 0$ ومنه $e^{x^2+y^2}\geq e^0=1$ إذاً:

$$f(x,y)=e^{x^2+y^2}\geq e^0=1=f(0,0)$$

فالنقطة صغرى مطلقة.

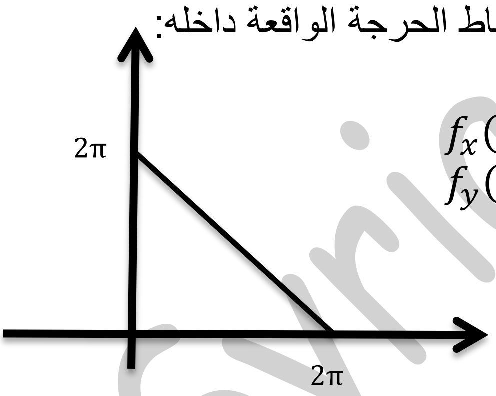
تمرين :

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

حدد القيم القصوى النسبية للدالة داخل المثلث المحدد بالمحورين ox,oy والمستقيم $x+y=2\pi$

الحل: نرسم المثلث الوارد في النص في المستوي oxy وسنبحث عن النقاط الحرجة الواقعة داخله:



نوجد المشتقات الجزئية الأولى لـ f ونجعلهم مساوين للصفر.

$$f_x(x,y)=\cos x-\cos(x+y)=0$$
$$f_y(x,y)=\cos y-\cos(x+y)=0$$
$$\Rightarrow \cos(x+y)=\cos x\ \ldots\ldots\ldots 1$$
$$\cos(x+y)=\cos y\ \ldots\ldots\ldots 2$$

من 1 نجد :

$$x+y=\ x+2\pi k\ \ldots\boxed{1}\quad \text{أو}\quad x+y=-x+2\pi k\ \ldots\boxed{2}$$

من $\boxed{1}$:

$$x+y=x+\pi k\ \Rightarrow\ y=2\pi k\ \ldots\boxed{5}\qquad ;k\in\mathbb{Z}$$

لنعطي ل k متنمة $k=-1\Longrightarrow y=2\pi$ مرفوضة لأنها تقع على المحيط وليس الداخل

من $\boxed{2}$:

$$x+y=-x+2\pi k\Rightarrow 2x+y=2\pi k$$

من أجل $k=1$ فإن $\boxed{*}\ldots 2x+y=2\pi$ وبشرط $0<x<\pi$ توجد نقاط حرجة داخل المثلث.

من أجل $k \neq 1$ لا توجد نقاط حرجة داخل المثلث لأنه إذا عوضنا $k = 2$ مثلاً والـ x بالفرض أكبر قيمة لها 2π وأصغر قيمة لها الصفر فإذا كانت $x = 2\pi$ فإن $y = -4\pi + 4\pi = 0$ وهو رأس المثلث والتالي لا تقع ضمن المثلث أما إذا كانت $x = 0$ فإن $y = 4\pi$ أي وقعت النقطة خارج المثلث وبالتالي عندما $k \neq 1$ لا توجد نقاط داخل المثلث.

من الثانية نجد :

$$x + y = \quad y + 2\pi k \ \ldots \boxed{3} \quad \text{أو} \quad x + y = -y + 2\pi k \ \ldots \boxed{4}$$

نلاحظ أن $\boxed{3}$ مرفوضة كما في السابق ومنه لا توجد نقاط حرجة داخل المثلث.

من $\boxed{4}$:

$$x + y = -y + 2\pi k \Rightarrow x = -2y + 2\pi k$$

من أجل $k = 1$ فإن $\boxed{**} \ldots x = -2y + 2\pi$ بشرط $0 < y < \pi$ توجد نقاط حرجة داخل المثلث

ومن أجل $k \neq 1$ لا توجد نقاط حرجة داخل المثلث. والآن بحل $\boxed{*}$ و $\boxed{**}$:

$$y = -2x + 2\pi$$
$$x = -2y + 2\pi$$

بالطرح $\quad y - x = -2x + 2y \Rightarrow x = y$

نعوض في إحدى المعادلتين $y = -2y + 2\pi \Rightarrow 3y = 2\pi \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} = x$

ومنه نجد $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ نقطة حرجة:

نوجد المحددات Δ_1, Δ_2

$$f_{xx}(x,y) = -\sin x + \sin(x+y) \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -\sin y + \sin(x+y) \Rightarrow f_{yy}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \sin(x+y) \Rightarrow f_{xy}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

وبما أن $\Delta_2 > 0$ و $\Delta_1 < 0$ فالنقطة $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ عظمى نسبية.

تمرين: مثّل العدد الموجب $\boldsymbol{a}$ على شكل جداء ثلاثة أعداد موجبة بحيث يكون مجموعها أصغر ما يمكن.

الحل: لنأخذ العدد الموجب تماماً $\boldsymbol{a}$ ولنكتبه كجداء ثلاث أعداد موجبة $\boldsymbol{x, y, z}$:

$$x.y.z = a \Rightarrow z = \frac{a}{x.y}$$

نعزل z ونحسبه بدلالة بقية الأعداد ونشكل دالة المجموع:

$$f(x,y) = x + y + z = x + y + \frac{a}{x.y}$$

و لنحاول إيجاد قيم صغرى نسبية:

$$f_x(x,y) = 1 - \frac{a}{x^2y} = 0 \Rightarrow \; x^2y = a \dots\dots\dots (1)$$

$$f_y(x,y) = 1 - \frac{a}{y^2x} = 0 \Rightarrow \; xy^2 = a \dots\dots\dots (2)$$

بالطرح $x^2y - xy^2 = 0 \Rightarrow xy(x-y) = 0$

$x \neq 0 \;\; , \;\; y \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = y$

نعوض في ١ نجد أن: $y^3 = a \Rightarrow y = \sqrt[3]{a}$

$$x^3 = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

ومنه $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ نقطة حرجة.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2a}{yx^3} \Rightarrow f_{xx}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{2a}{\sqrt[3]{a}\, a} = \frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} > 0$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2a}{xy^3} \Rightarrow f_{yy}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} = \Delta_1$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{a}{x^2y^2} = f_{yx}(x,y) \Rightarrow f(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2a^{-\frac{1}{3}} & a^{-\frac{1}{3}} \\ a^{-\frac{1}{3}} & 2a^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = 4a^{-\frac{2}{3}} - a^{-\frac{2}{3}} = 3a^{-\frac{2}{3}} > 0$$

ومنه $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ صغرى نسبية.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب