نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄المحاضرة: السادسة عشرة　　　عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : تمارين .

تمرين : ليكن $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ تابع مستمر

$\Leftrightarrow \quad \forall A\subseteq Y\,;\ Fr\ f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(Fr(A))$.

الحل

" $\Leftarrow$ " لنفرض أن f مستمر عندئذ حسب تمرين مر سابقا

$$\begin{cases}\forall A\subseteq Y:\ \overline{f^{-1}(A)}\subseteq f^{-1}(\bar{A})\ \ldots(1\\ \forall A\subseteq Y: f^{-1}(A^{\circ})\subseteq\left(f^{-1}(\bar{A})\right)^{\circ}\ \ldots(2\end{cases}$$

بأخذ المتمم للطرفين في الاحتواء الثاني نجد : $\quad ((f^{-1}(A))^{\circ})^{C}\subseteq(f^{-1}(A^{\circ}))^{C}\ \ldots.(3$

نقاطع الأحتوائين $(1$ و $(3$ طرفا إلى طرف نجد أن :

$$\overline{f^{-1}(A)}\cap\left(\left(f^{-1}(\bar{A})\right)^{\circ}\right)^{c}\subseteq f^{-1}(\bar{A})\cap(f^{-1}(A^{\circ}))^{c}$$

$$\Rightarrow\overline{f^{-1}(A)}\setminus(f^{-1}(A))^{\circ}\subseteq f^{-1}(\bar{A})\cap f^{-1}((A^{\circ}))^{c}$$

$$\overline{f^{-1}(A)}\setminus(f^{-1}(A))^{\circ}\subseteq f^{-1}(\bar{A}\cap(A^{\circ})^{c})=f^{-1}(\bar{A}\setminus A^{\circ})$$

$$\Rightarrow Fr\left(f^{-1}(A)\right)\subseteq f^{-1}(Fr(A))$$

$$Fr(B)=\bar{B}\setminus B^{\circ}$$

" $\Rightarrow$ " لنثبت أن f مستمر ، لتكن θ مجموعة مفتوحة في Y عندئذ حسب تمرين سابق

$$Fr\,\theta \subseteq \theta^c \Rightarrow f^{-1}(Fr\,\theta) \subseteq f^{-1}(\theta^c) \Rightarrow Fr\big(f^{-1}(\theta)\big) \subseteq f^{-1}(Fr(\theta))$$

$$\subseteq f^{-1}(\theta^c) = \big(f^{-1}(\theta)\big)^c$$

$$\Rightarrow Fr\big(f^{-1}(\theta)\big) \subseteq \big(f^{-1}(\theta)\big)^c \iff \text{مفتوحة } f^{-1}(\theta)$$

ومنه نجد أن f مستمر حسب مبرهنة سابقة .

تمرين : سابقا أثبتنا ((في المحاضرة السابعة))

أن المجموعة $c = \{x \in X : d(x,a) < d(x,b)\}$ مفتوحة

$E = \{x \in X : d(x,a) = d(x,b)\}$ مغلقة

وسوف نبين ذلك مرة أخرى بطريقة ثانية .

الحــل

لنعرف التابعين $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ولنرمز بـ :

$f(x) = d(x,a)$ ، $g(x) = d(x,b)$

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x) \\ x_n \longrightarrow x \Rightarrow g(x_n) \longrightarrow g(x) \end{cases} \iff g, f \text{ مستمران}$$

وليكن لدينا التابع $h(x) = g(x) - f(x)$ مستمر لأن :

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty}\big(g(x_n)\big) - \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big)$$

$$= g(x) - f(x) = h(x)$$

إذا أصبح لدينا :

$h : (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\,.\,|)$ مستمر .

وبفرض أن $]0, +\infty[$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فإن $h^{-1}(]0,+\infty[)$ تكون مجموعة مفتوحة حسب مبرهنة سابقة .

$$\Rightarrow \{x \in X : h(x) \in]0,+\infty[\} = h^{-1}(]0,+\infty[)$$

$$= \{x \in X : h(x) > 0\} = \{x \in X : g(x) - f(x) > 0\}$$

$$= \{x \in X : g(x) > f(x)\} = \{x \in X : d(x,a) < d(x,b)\} = c$$

وهي مجموعة مفتوحة .

كما أن المجموعة $\{0\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$ لأن : $\{0\}^c =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع مجموعتين مفتوحتين و بالتالي $\{0\}$ مغلقة ، وبما أن h مستمر فإن $h^{-1}(\{0\})$ أيضا مغلقة في X وبالتالي :

$$h^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : h(x) \in \{0\}\} = \{x \in X : h(x) = 0\}$$

$$= \{x \in X : g(x) - f(x) = 0\} = \{x \in X : d(x,a) = d(x,b)\}$$

تمرين : أثبت أن $\grave{\grave{A}} \subseteq \grave{A}$.

الـحـل :

ليكن $x \in \grave{\grave{A}}$ عندئذ x نقطة حدية لـ $\grave{A}$ ومنه توجد متتالية من عناصر $\grave{A}$ ولتكن $\{x_n\}$ متقاربة من x

أي أن $x_n \longrightarrow x \ni \grave{A}$ ولنثبت أن $x \in \grave{A}$ أي لنثبت : $\forall \varepsilon > 0 ; N(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

من أجل $0 < \varepsilon$ وبما أن $x_n \longrightarrow x$ فإنه يوجد $n_\circ \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n \geq n_\circ$ فإن :

$$d(x_n, x) < \varepsilon \longrightarrow x_n \in N(x,\varepsilon)$$

لنرمز بـ $b = x_{n_\circ}$ إذا b نقطة حدية لـ A كما أن $b \in N(x,\varepsilon)$

إما توجد n بحيث $x = x_n$ وبهذا يتم المطلوب وتكون $x \in \grave{A}$

أو توجد m بحيث $x = x_m$ ومنه $x \in \grave{A}$ وأن $x_n \neq x$

أيا كان $n \in \mathbb{N}^*$ وبما أن $b \in N(x,\varepsilon)$ فإن $N(b,t) \subseteq N(x,\varepsilon)$ حيث :

$$t = min\{d(x,b), \varepsilon - d(x,b)\}$$

إن $t > 0$ لأن لما كان $x \neq b$ فإن $d(x,b) > 0$ و $d(x,\varepsilon) < \varepsilon$

ومنه $\varepsilon - d(x,b) > 0$

كما أن $x \notin N(b,t)$ لأن $d(x,b) \geq t$

ولما كانت b نقطة حدية لـ A فإن : $y \in N(b,t) \cap A \setminus \{b\} \neq \emptyset$ ومنه :

$y \in N(b,t)$ ، $y \in A \setminus \{b\}$ ، $y \neq x$ (لأن $y \in N(b,t)$)

ومنه : $y \in N(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\}$

إذا مهما يكن $\varepsilon > 0$ وجدنا : $N(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

إذا x نقطة حدية لـ A ومنه $x \in A^`$ ومنه $A^{``} \subseteq A^`$.

كما أن $A^`$ مغلقة لأنه حسب تمرين سابق : $(A^`)^` \subseteq A^` \Leftarrow A^`$ مغلقة .

تمرين : ليكن X متراص $\Leftrightarrow$ كل جماعة $\{F_i \ : i \in I\}$ من المغلقات في X التي يكون تقاطعها المنتهي غير خالي يكون تقاطع كل مجموعاتها غير خالي .

الـحـل :

" $\Leftarrow$ " نفرض أن X متراص ولتكن $\{F_i \ : i \in I\}$ جماعة من المغلقات بحيث تقاطع أي عدد منته من المجموعات فيها غير خالي ، ولنبرهن أن $\bigcap_{i \in I} F_i$ غير خالي .

نفرض جدلاً أن $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ ومنه بأخذ متمم الطرفين $\bigcap_{i \in I} {F_i}^c = X$

لكن ${F_i}^c$ مجموعات مفتوحة إذاً $\{{F_i}^c \ : i \in I\}$ تغطية مفتوحة لـ X ولما كان X متراص فتوجد تغطية جزئية منتهية منها تحوي X أي :

$$ {F_{i_1}}^c \cup {F_{i_2}}^c \cup \dots \cup {F_{i_n}}^c = X $$

بأخذ متمم الطرفين : $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$

وهذا يناقض الشرط أن تقاطع عدد منته غير خالي ومنه الفرض الجدلي خاطئ ،

والصحيح $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$

" $\Rightarrow$ " لنبرهن أن X متراص :

لتكن $\{\theta_i \ : i \in I\}$ تغطية مفتوحة لـ X فإن $X = \bigcup_{i \in I} \theta_i$

بأخذ متمم الطرفين $\emptyset = \bigcap_{i \in I} {\theta_i}^c$

لدينا جماعة من المغلقات $\{{\theta_i}^c \ : i \in I\}$ في X تقاطعها المنتهي خالي إذاً لابد من وجود عدد منته من المجموعات المغلقة بحيث تقاطعها خالي .

مثال : ${\theta_{i_1}}^c \ , \ {\theta_{i_2}}^c \ \dots \ {\theta_{i_n}}^c$ ومنه $\bigcap_{k=1}^{n} {\theta_{i_k}}^c = \emptyset$ بأخذ متمم :

$\bigcup_{k=1}^{n} \theta_{i_k} = X$ ومنه X متراص .

انتهت المحاضرة

إعداد: آية اليافي * ناريمان جلو * هالة مصطفى