7-5-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الثانية عشر والاخيرة عنوان المحاضرة: المثاليات الأولية

المحتوى العلمي :

١- أمثلة داعمة على المثاليات الأولية .

٢- مبرهنة هامة .

مثال: لتكن $(R,+,.)$ حلقة تبديلية واذا كانت I مثالية أولية في R واذا كانت I_1, I_2 مثاليين في الحلقة R بحيث $I_1.I_2 \subseteq I$. بين أن احدى المثاليين I_1, I_2 على الاقل محتوى في I .

الحل

لنفرض جدلاً عكس ذلك و هذا يعني يمكننا ايجاد عنصرين x, y من I_1, I_2 على الترتيب بحيث:

$$x.y \in I_1.I_2 \Rightarrow x.y \in I$$

لكن :

$$x \notin I \quad , \quad y \notin I$$

وبما أن I مثالية أولية في R فإنه اما $y \in I \quad \vee \quad x \in I$ و هذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ

اذاً احدى المثاليتين I_1, I_2 محتواة في I على الأقل .

مثال: ليكن I مثالية في الحلقة $(R,+,.)$ بحيث $I \neq R$ أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية I أولية في الحلقة $(R,+,.)$ هو أن لا تحوي الحلقة $(R/I,+,.)$ قواسم الصفر .

الحل

لزوم الشرط : لنفرض أن I أولية في الحلقة $(R,+,.)$ و لنبرهن أن الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر .

لنفرض جدلاً أن R/I تحوي قواسم الصفر وبالتالي يوجد عنصرين x,y من R بحيث يكون

$$x+I\neq I\ ,\qquad y+I\neq I$$

ومنه $(x+I).(y+I)=I$

$$(x+I).(y+I)=x.y+I=I$$

اي أن $x.y\in I$

وبما أن I أولية في الحلقة $(R,+,.)$ فرضاً فإنه اما $x\in I\ \ \vee\ \ y\in I$ وهذا يؤدي الى أن

$$x+I=I\ \ \vee\ \ y+I=I$$

وهذا مخالف لأن

$$x+I\neq I\ ,\qquad y+I\neq I$$

وبالتالي الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر .

كفاية الشرط : لنفرض أن الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر و لنبرهن أن I أولية في الحلقة $(R,+,.)$

ليكن $x,y\in R$ بحيث يكون $x.y\in I$ فإن

$$x.y+I=(x+I).(y+I)=I$$

وبما أن الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر فإنه أحد العنصرين مساوياً للصفر أي

$$x+I=I\ \ \vee\ \ y+I=I$$

وبالتالي فإنه اما $x\in I\ \ \vee\ \ y\in I$ **اذاً I مثالية أولية .**

◄ **تذكرة تمهيدية اقليدس:** ليكن p عدد أولي و $a,b\in Z$ اعداد صحيحة اذا كان p يقسم الجداء $a.b$ عندئذ اما p تقسم a أو p تقسم b .

تعريف :(خارجي لفهم المبرهنة التالية) ليكن R منطقة تكاملية ، $0\neq x\in R$ نقول عن العنصر x أنه أولي في R اذا حقق ما يلي :

١) العنصر x غير قابل للقلب في R .

٢) اذا كان $a,b\in \mathrm{R}$ وكان x يقسم الجداء $a.b$ عندئذ إما x يقسم a أو x يقسم b .

مبرهنة هامة :

لتكن R منطقة تكاملية ولتكن $0 \neq x \in R$ الشرط اللازم والكافي لكي يكون العنصر x أولياً R هو أن يكون المثالي xR أولياً في R .

البرهان

لزوم الشرط : بفرض أن العنصر x أولياً في R ولنبرهن أن المثالي xR أولي في R

بما أن العنصر x غير قابل للقلب في R فإن $xR \neq R$.
ليكن $a, b \in R$ بحيث $a.b \in xR$ عندئذ يوجد $r \in R$ بحيث $a.b = xr$ هذا يعني أن x يقسم الجداء $a.b$ ومنه يكون إما x يقسم a أو x يقسم b
لنفرض أن x لا يقسم a وبالتالي x يقسم b عندئذ يوجد $c \in R$ بحيث $b = x.c$
ومنه $b = x.c \in xR$ اذاً المثالي xR أولي.

كفاية الشرط : بفرض أن xR مثالي أولي ولنبرهن أن العنصر x أولي في R بما أن $xR \neq R$

عندئذ العنصر x غير قابل للقلب في R
ليكن العنصرين $a, b \in R$ وبفرض أن العنصر x يقسم $a.b$ حيث $a, b \in R$ عندئذ يوجد $d \in R$
$a.b = xd \in xR$ وبما أن المثالي xR مثالي أولي عندئذ : اما $a \in xR$ او $b \in x$
بفرض $a \notin xR$ عندئذ $b \in xR$
عندئذ يوجد $h \in R$ يصبح لدينا $b = xh$ هذا يبين أن العنصر x يقسم b
و منه حسب اقليدس x عنصر أولي في R .

انتهت المحاضرة

انتهى المقرر.. نتمنى لكم التوفيق في الامتحان..

مع كل الشكر لثقتكم بنا..

إعداد: هلا همج – لانا شهاب – أحمد أبو التوت

تنسيق: ولاء الأخضر♥