◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة: المثاليات الأولية

المحتوى العلمي :

١ـ تعريف المثاليات الأولية .

٢ـ مبرهنتان توضحان التعريف بشكل تفصيلي .

٣ـ أمثلة .

المثاليات الأولية

تعريف : لتكن R حلقة ولتكن $P \neq R$ مثالياً في R عندئذ نقول عن المثالي P أنه أولي في R اذا كان لأجل المثاليين A, B من R بحيث $A.B \subseteq P$ عندئذ إما

$$A \subseteq P \quad \vee \quad B \subseteq P$$

مبرهنة : لتكن R حلقة ولتكن $P \neq R$ مثالياً في R الشرط اللازم والكافي لكي يكون المثالي P أولياً في R هو ان يتحقق ما يلي $\forall a, b \in R : a.b \in P$ عندئذ يكون إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$.

البرهان

لزوم الشرط : بفرض أن المثالي P أولي في R ولنثبت انه إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$ وذلك اذا كان

$$\forall a, b \in R : a.b \in P$$

ليكن $a, b \in R$ بحيث $a.b \in P$ وبالتالي يكون

$$(aR)(bR) = (a.b)R \subseteq P$$

وذلك لان P مثالي ومنه بما أن P أولي

اما $(aR) \subseteq P$ أي $a \in P$

أو $(bR) \subseteq P$ أي $b \in P$

كفاية الشرط : لنفرض أنه إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$ ولنثبت أن P مثالي أولي .

ليكن A, B مثاليين في R بحيث $A.B \subseteq P$ وبفرض أن $A \not\subset P$ عندئذ يوجد عنصر $a \in A$ بحيث $a \notin P$ وليكن $b \in B$ عندئذ يكون

$$a.b \in A.B \subseteq P$$

كون $a \notin P$ فإنه و حسب الفرض سيكون $b \in P$ وبالتالي $B \subseteq P$ ومنه المثالي P أولي .

◄ **تذكرة** . تعرف حلقة الخارج بأنه اذا كان لدينا R حلقة و A مثالي في R عندئذ تعرف بالشكل :

$$R/A = \{r + A : r \in R\}$$

أيضا $r \in A \Leftrightarrow r + A = A$

مبرهنة : لتكن R حلقة تبديلية ولتكن P مثالياً في R الشرط اللازم والكافي لكي يكون المثالي P أولياً في R هو ان تكون حلقة الخارج R/P منطقة تكاملية .

البرهان

لزوم الشرط : بفرض أن المثالي P أولي في R ولنثبت أن R/P منطقة تكاملية .

- بما أن R تبديلية فتكون R/P تبديلية
- إن P اولياً في R فإن $P \neq R$ (حسب التعريف) وبالتالي يكون لدينا $1 \notin P$
(حسب مبرهنة سابقة لدينا اذا كان R حلقة و P مثالي $P = R \Leftrightarrow 1 \in P$)

هذا يعني أن $1 + P \neq P$ ومنه R/P حلقة واحدية .

- ليكن لدينا $a + P, b + P$ عناصر من الحلقة R/P عندئذ حسب تعريف حلقة الخارج نجد أن

$$(a + P).(b + P) = (a.b) + P = P$$

أي $a.b \in P$ وبما أن P أولي فإن $a \in P \quad \vee \quad b \in P$ عندئذ إما

$$b + P = P \quad \vee \quad a + P = P$$

(**ملاحظة :** $P+0$ هو الصفر ووجدنا ان احد العناصر مساوياً للصفر)

اي لا تحوي قواسم الصفر ومنه فإن R/P منطقة تكاملية.

كفاية الشرط : بفرض أن R/P منطقة تكاملية عندئذ $1+P\neq P$ **(حسب تعريف المنطقة التكاملية واحد الحلقة لا يساوي صفرها)** اي $1\notin P$ **ومنه** $P\neq R$

وليكن لدينا $a,b\in \boldsymbol{R}$ **بحيث** $a.b\in P$ **عندئذ** $(a.b)+P=P$ وبالتالي

$$(a+P).(b+P)=P$$

وبما أن R/P منطقة تكاملية أي لا تحوي قواسم الصفر فإن

$$a+P=P \quad \vee \quad b+P=P$$

عندئذ يكون لدينا $a\in P \quad \vee \quad b\in P$ ومنه فإن المثالي P أولي .

◄**نتيجة:** لتكن $R\neq 0$ حلقة عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي تكون الحلقة R منطقة تكاملية هو ان يكون المثالي الصفري $\{0\}$ أولياً في R .

مثال: ليكن $R=Z\times Z$ و $P=Z\times\{0\}$ برهن أن المثالي P هو أولي في R .

الحل

ليكن $x,y\in R$ بحيث $x=(a,b) \quad ,y=(c,d)$ و حسب التعريف يجب أن يكون $x.y\in P$

$$x.y=(a,b).(c,d)=(a.c,b.d)\in P$$

أي أن المسقط الثاني ل $x.y$ يجب أن يكون مساوياً لصفر

أي $b.d=0$ ولكن Z منطقة تكاملية أي لا تحوي قواسم الصفر ومنه إما $d=0$ أو $b=0$

$$\begin{cases} \text{اذا كان} \quad b=0 \quad \text{فان} \quad x=(a,0)\in P \\ \text{اذا كان} \quad d=0 \quad \text{فان} \quad y=(c,0)\in P \end{cases}$$

P مثالي أولي .

مثال: لتكن $(Z_6,+,.)$ حلقة ولتكن $P=\{0,3\}$ برهن أن P مثالي أولي في Z_6 .

الحل

لنبرهن اولاً أن P مثالي وذلك من خلال الجدولين التاليين (شرطي المثالي)

$+$	0	3
0	0	3
3	3	0

ومنه $(P,+)$ زمرة جزئية .

$.$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	3	0	3

ومنه $\forall r\in Z_6\,,\ a\in P\ :\ \ r.a\in P$

ومنه الشرطان محققان ولنثبت ان المثالي اولي .

ان P مثالي أولي في Z_6 لأن $P\neq Z_6$ وايضاً $\forall a,b\in Z_6$ بحيث $a.b\in P$

ومنه إما $a.b=0$ أو $a.b=3$

$.$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

نلاحظ من الجدول انه عندما يكون ناتج الجداء إما 0 أو 3 فإن أحد العددين ينتمي الى P .

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – لانا شهاب – أحمد أبو التوت