30-4-2018

نظري

◀ دكتورة المادة: ملك مارديني

◀المحاضرة: الرابعة عشر عنوان المحاضرة: السطوح التكاملية المتعامدة

المحتوى العلمي :

١ـ حل تمارين الوظيفة

٢ـ بدأت محاضرتنا مع تمارين عن السطوح التكاملية .

٣ـ السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة.

٤ـ تمرين عن الفقرة السابقة

اوجد السطوح التكاملية للمعادلات التفاضلية التالية:

$$y.z.p - x.z.q = e^z$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى، (معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{y.z}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{-x.z}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{e^z}}_{(3)}$$

بأخذ $(1) = (2)$ نجد:

$$\frac{dx}{y.z} = \frac{dy}{-x.z} \Rightarrow \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Rightarrow -x.dx = y.dy \Rightarrow x.dx + y.dy = 0$$

بالمكاملة يكون:

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1'$$
$$\Rightarrow c_1 = x^2 + y^2 = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(1) = (3)$ نجد:

$$\frac{dx}{y.\mathfrak{z}} = \frac{d\mathfrak{z}}{e^{\mathfrak{z}}} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{\mathfrak{z}.d\mathfrak{z}}{e^{\mathfrak{z}}}$$

من عبارة c_1 نجد أنَّ:

$$c_1 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = c_1 - x^2 \quad \Rightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2}$$

بالتعويض يكون:

$$\frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \frac{\mathfrak{z}.d\mathfrak{z}}{e^{\mathfrak{z}}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \underbrace{\int \mathfrak{z}.e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z}}_{I}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} = I \ldots (*)$$

حيث لدينا:

$$I = \int \underbrace{\mathfrak{z}}_{u}.\underbrace{e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z}}_{dv}$$

نكامل I بالتجزئة:

$$u = \mathfrak{z} \qquad \Rightarrow \quad du = d\mathfrak{z}$$
$$dv = e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z} \Rightarrow \quad v = -e^{-\mathfrak{z}}$$
$$I = u.v - \int v.du = \mathfrak{z}(-e^{-\mathfrak{z}}) + \int e^{-\mathfrak{z}}.d\mathfrak{z}$$
$$\Rightarrow I = -e^{-\mathfrak{z}}.\mathfrak{z} - e^{-\mathfrak{z}} + c_2 \quad \Rightarrow \quad I = -(\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}} + c_2$$

نعوض في $(*)$:

$$\Rightarrow arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} = -(\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}} + c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} + (\mathfrak{z}+1)e^{-\mathfrak{z}}$$

نعود فنعوض قيمة c_1:

$$\Rightarrow c_2 = arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z+1)e^{-z} = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u,v) = 0 \Rightarrow F(c_1, c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F\left(x^2+y^2\,, arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z+1)e^{-z}\right) = 0$$

$$(y-z)^2 .p + x.z.q = xy$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{(y-z)^2}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{x.z}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{x.y}}_{(3)}$$

بأخذ $(2) = (3)$ نجد:

$$\frac{dy}{x.z} = \frac{dz}{x.y} \Rightarrow \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y.dy = z.dz$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c_1' \Rightarrow c_1' = \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$$
$$\Rightarrow c_1 = y^2 - z^2 = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(2) - (3) = (1)$ نجد:

$$\frac{dy - dz}{x(z-y)} = \frac{dx}{(y-z)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-d(y-z)}{x(y-z)} = \frac{dx}{(y-z)^2} \Rightarrow -(y-z).d(y-z) = x.dx$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\frac{(y-z)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_2'$$

$$\Rightarrow (y-z)^2 + x^2 = c_2 = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u,v) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; F(c_1, c_2) = 0$$

$$\Rightarrow F(y^2 - z^2, (y-z)^2 + x^2) = 0$$

$$p.\sin^2 x + q.\tan z = \cos^2 z$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{\tan z}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{\cos^2 z}}_{(3)}$$

بأخذ $(2) = (3)$ نجد:

$$\frac{dy}{\tan z} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{\tan z.dz}{\cos^2 z} = \frac{\frac{\sin z}{\cos z}.dz}{\cos^2 z} = \frac{\sin z}{\cos^3 z}.dz = \sin z.\cos^{-3} z.dz$$

$$\Rightarrow \int dy = -\int (-\sin z).\cos^{-3} z.dz$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{(-2)} \cos^{-2} z + c_1$$
$$\Rightarrow c_1 = y - \frac{1}{2} \cos^{-2} z = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(3) = (1)$ نجد:

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$-\cot x = \tan z + c_2'$$
$$\Rightarrow c_2' = -\cot x - \tan z \quad ; c_2' = -c_2$$
$$\Rightarrow c_2 = \tan z + \cot x = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(c_1, c_2) = 0$$
$$\Rightarrow F\left(y - \frac{1}{2} \cos^{-2} z , \tan z + \cot x\right) = 0$$

$$(y+z).p + (x+z).q = x - y$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{(y+z)}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{(x+z)}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{(x-y)}}_{(3)}$$

بأخذ $(3) = (2) - (1)$ نجد:

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dz}{x - y} \quad \Rightarrow -\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{x-y} \quad \Rightarrow -d(x-y) = dz$$

$$\Rightarrow d(x-y)+d\mathfrak{z}=0$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\Rightarrow c_1 = x-y+\mathfrak{z}=u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(1)+(3)=(1)-(2)$ نجد:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx+d\mathfrak{z}}{x+\mathfrak{z}} \Rightarrow -\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dx+d\mathfrak{z}}{x+\mathfrak{z}} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y}+\frac{d(x+\mathfrak{z})}{x+\mathfrak{z}}=0$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$ln(x-y)+ln(x+\mathfrak{z})=lnc_2$$
$$\Rightarrow (x-y)(x+\mathfrak{z})=c_2=v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$\boldsymbol{F(x-y+\mathfrak{z}\,,(x-y)(x+\mathfrak{z}))=0}$$

$$2\left(y-x\right)+2p\left(y+z\right)-2q\left(x+z\right)=0$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{y+z}}}_{(1)}=\underbrace{\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{-(x+z)}}}_{(2)}=\underbrace{\frac{\boldsymbol{d\mathfrak{z}}}{\boldsymbol{x-y}}}_{(3)}$$

بأخذ $(3)+(2)+(1)$ نجد:

$$\frac{dx+dy+dz}{y+z-(x+z)+x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

$$\Rightarrow dx + dy + dz = 0$$
$$\Rightarrow x + y + z = c_1$$

وهو التكامل الأولي الأول.

والأن بأخذ $(1) + (3) = (2) + (3)$

$$\frac{dx + dz}{z + x} = \frac{dy + dz}{-z - y}$$
$$\Rightarrow \frac{d(x + z)}{z + x} = \frac{-d(y + z)}{y + z}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$l\,n(x + z) = -\,ln\,y + z + ln\,c_2$$
$$\Rightarrow ln(x + z) = ln\left(\frac{c_2}{y + z}\right) = ln\,c_2$$
$$\Rightarrow x + z = \frac{c_2}{y + z}$$
$$\Rightarrow c_2 = (x + z)(y + z)$$

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو :

$$\Rightarrow \quad F(c_1\,, c_2) = 0$$
$$\Rightarrow F(x + y + z\,), (x + z)(y + z)) = 0$$

$$x^2.p + y^2.q = (x + y)z$$

الحل :

نلاحظ أنّنا أمام معادلة تفاضليّة جزئية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى،

(معادلة لاغرانج غير متجانسة) لإيجاد الحل العام لها نكتب الجملة الملحقة لها:

$$\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{y^2}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{(x + y)\,z}}_{(3)}$$

بأخذ $(1) = (2)$ نجد:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = u$$

وهو التكامل الأوّلي الأوّل.

والآن بأخذ $(3) = (2) - (1)$ نجد:

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{d\mathfrak{z}}{(x+y)\,\mathfrak{z}}$$
$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{d\mathfrak{z}}{(x+y)\,\mathfrak{z}} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)} = \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}$$

بمكاملة الطرفين يكون:

$$ln(x-y) = ln\,\mathfrak{z} + ln\,c_2$$
$$\Rightarrow ln(x-y) - ln\,\mathfrak{z} = ln\,c_2 \Rightarrow ln\left(\frac{x-y}{\mathfrak{z}}\right) = ln\,c_2$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{x-y}{\mathfrak{z}} = v$$

وهو التكامل الأوّلي الثاني.

وبالتالي يكون الحل العام (السطوح التكاملية) هو:

$$F(u,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(c_1\,, c_2) = 0$$
$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\,, \frac{x-y}{\mathfrak{z}}\right) = 0$$

أوجد السطوح التكاملية للمعادلة: $\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)p + q = 2$

الحل:

نكتب الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

من (٢) و (٣) نجد : $\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}\rightarrow 2dy=dz\rightarrow 2dy-dz=0 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} 2y-z=C_1$

نضرب dx ب (-1) و dy ب (-1) أي (البسط والمقام) ونجمعهم ومنه:

$$\frac{-dx-dy+dz}{-1-\sqrt{z-x-y}-1+2}=\frac{-dx-dy+dz}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}$$

$$=-\frac{d(z-x-y)}{\sqrt{z-x-y}}=dy \xRightarrow{\text{بالمكاملة(حيث أن البسط هو مشتق مضمون الجذر)}} -2\sqrt{z-x-y}$$

$$=y+C_2\rightarrow C_2=-2\sqrt{z-x-y}+y$$

والسطوح التكاملية هي :

$$F(C_1,C_2)=0\rightarrow \boxed{\boldsymbol{F\left(2y-z,-2\sqrt{z-x-y}+y\right)=0}}$$

$xy^3p+x^2z^2q=y^3$ والمار بالمنحني $x=-z^2$, $y=z^2$

الحل :

هي م ت ج خطية من المرتبة الأولى حلها العام من الشكل $F(u,v)=0$ حيث $u\,,v$ تكاملان اوليان للجملة الملحقة حيث ان الجملة الملحقة هي : $\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{x^2z^2}=\frac{dz}{y^3z}$

١ ٢ ٣

التكامل الأول : من ١ و ٣ نجد ان

$$\frac{dx}{xy^3}=\frac{dz}{y^3z}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$$

نكامل : $\ln x=\ln z+\ln c\Rightarrow x=z.c_1\Rightarrow c_1=\frac{x}{z}$

التكامل الثاني : ناخذ ١ و ٢ و ٣

$$\frac{dx-dz}{xy^3-y^3z}=\frac{dz}{y^3}\Rightarrow\frac{d(x-z)}{y^3(x-z)}=\frac{dz}{y^3z}\Rightarrow\frac{d(x-z)}{(x-z)}=\frac{dz}{z}$$

نكامل : $ln(x-z)=ln\,z+ln\,c_2\Rightarrow x-z=z.c_2\Rightarrow c_2=\frac{x-z}{z}$

ومنه معادلة السطوح هي : $F\left(\frac{x}{z},\frac{x-z}{z}\right)=0$

معادلة السطح هي : , $c_1=\frac{x}{z}..(3)$, $c_2=\frac{x-z}{z}...(4)$

$x=-z^3\,...(1)$, $y=z^2\,...(2)$

نعوض ١ و ٢ و ٣ و ٤ نجد:

$$c_1=-y\Rightarrow c_2=\frac{x}{z}-\frac{z}{z}\Rightarrow c_2=c_1-1\,...(5)$$

نعوض ٤ و ٣ في ٥ فنجد : $\frac{x-z}{z}=-y-1\Rightarrow\frac{x-z}{z}+y=-1$

تمرين:

أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية(سؤال دورة) :

$$x(y^2+z)p-y(x^2+z)q=(x^2-y^2)z$$

والمار بالمنحنيين المعينين بالمعادلتين التاليتين: $x+y=0\quad \&\&\quad z=1$

الحل:

نكتب الجملة الملحقة ومنه :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\rightarrow\frac{dx}{x(y^2+z)}=\frac{dy}{-y(x^2+z)}=\frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

نضرب الأولى ب y والثانية ب x ومنه:

$$\frac{ydx+xdy}{xy^3+xyz-yx^3-xyz}=\frac{dz}{(x^2-y^2)z}\xRightarrow{\text{نخرج } yx \text{ عامل مشترك من المقام}}$$

$$\frac{ydx+xdy}{yx(y^2+z-x^2-z)}=\frac{dz}{(x^2-y^2)z}\rightarrow\frac{ydx+xdy}{yx(y^2-x^2)}=\frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

$$\frac{ydx+xdy}{yx(y^2-x^2)}=-\frac{dz}{(y^2-x^2)z}\rightarrow\frac{ydx+xdy}{yx}=-\frac{dz}{z}\dots\dots\dots(\#)$$

نعلم أن (#) هي $d(xy)=xdy+ydx$ وبالتالي $\frac{d(xy)}{yx}=-\frac{dz}{z}$ بالمكاملة:

$$ln|xy|=-ln|z|+ln(C_1)\rightarrow ln(x.y)=ln\left(\frac{1}{z}\right)+lnC_1\xRightarrow{\text{وحسب خواص اللوغاريتم}}$$

$$xy=\frac{C_1}{z}\rightarrow \boldsymbol{x.y.z=C_1}$$

الآن نضرب النسبة (١) ب x والثانية ب y ونطرح (٣) منهما:

$$\frac{xdx+ydy-dz}{x^2(y^2+z)-y^2(x^2+z^2)-(x^2-y^2)z}=\frac{xdx+ydy-dz}{0}\rightarrow$$

$$xdx+ydy-dz=0\xRightarrow{\text{تكامل}}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z=C_2'\xRightarrow{\text{نضرب الطرفين ب٢}}$$

$$x^2+y^2-2z=C_2\ ;\ C_2=2C_2'$$

وبالتالي تكون معادلة السطوح التكاملية هي :

$$F(C_1,C_2)=0\rightarrow\boxed{\boldsymbol{F(x.y.z,x^2+y^2-2z)=0}}$$

ولإيجاد السطح التكاملي المار بالمنحنيين: لدينا أولاً

$$x+y=0\dots\dots.(2)\ \&\&\&\ \ z=1$$

ولدينا أيضاً: $x^2+y^2-2z=C_2\dots\dots\dots(4)$ $\quad x.y.z=C_1\dots\dots\dots(3)\ \&\&$

لنأخذ المعادلات الوسيطية للمنحني $z=1$ وهي $\boldsymbol{x=t}\ \&\&\ \boldsymbol{y=-t}$ نعوض في (٣)

$$\boldsymbol{C_1=-t^2}\xRightarrow{\text{نعوض المعادلات الوسيطية في}\boldsymbol{(4)}}t^2+t^2-2=C_2\rightarrow C_2=2t^2-2$$

$$\boldsymbol{C_2=-2C_1-2}$$

والآن نعوض كل من C_1,C_2 بما يساويان ومنه:

وهي معادلة السطح المطلوب : $\boxed{-2x.y.z - 2 = x^2 + y^2 - 2z}$

السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة:

لنفرض أنه لدينا مجموعة من السطوح التابعة لوسيط ما معطاة بالعلاقة :

$$\varphi(x,y,z) = C \dots\dots\dots (1)$$

عندئذ إن السطوح المتعامدة مع هذه السطوح (١) تكون سطوحاً مولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة الملحقة التي هي :

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

مثال:

أوجد السطوح المتعامدة مع مجموعة السطوح المولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة التفاضلية الملحقة التالية: $z(x+y) = C(3z+1)$ والمار بالدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 = 1 \ \&\& \ z = 1$$

الحل:

في البداية سوف نقوم بعزل C ومن ثم نأخذ الجملة الملحقة:

$$C = \frac{z(x+y)}{3z+1} = \varphi(x,y,z)$$

وبالتالي السطوح المتعامدة لمجموعة السطوح التي نحصل عليها من الجملة الملحقة التالية:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{dy}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{dz}{\frac{(x+y)(3z+1) - 3z(x+y)}{(3z+1)^2}}$$

هنا طبقنا مشتق كسر

$$\xrightarrow{\text{نقسم على } (3z+1)^2} \frac{(3z+1)^2 dz}{(x+y)(3z+1-3z)} = \frac{(3z+1)dy}{z} = \frac{(3z+1)dx}{z} =$$

$$\frac{dx}{z(3z+1)} = \frac{dy}{z(3z+1)} = \frac{dz}{x+y}$$

١ ٢ ٣

من النسبتين (١) و(٢) لدينا $dx = dy$ ومنه بالمكاملة :

$$x = y + C_1 \to \boxed{x - y = C_1}$$

الآن نضرب (١) ب x والثانية ب y والثالثة ب $-z(3z+1)$ ومنه:

$$\frac{xdx + ydy - z(3z+1)dz}{(3xz^2 + xz) + (3yz^2 + yz) - 3xz^2 - xz - 3yz^2 - yz}$$

$$= \frac{xdx + ydy - z(3z+1)}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{وبالتالي}} xdx + ydy + (-3z^2 - z)dz = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^3 - \frac{z^2}{2} = C_2 \xrightarrow[\text{نضرب ب}(2)]{} x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = C_2$$

حيث : $C_2 = 2C_2'$

ومنه السطوح التكاملية:

$$F(C_1, C_2) = 0 \to \boxed{F(x - y, x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2) = 0}$$

لإيجاد معادلة السطح المار بالدائرة :

$$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots (1) \;\; \&\& \;\; z = 1 \dots\dots (2)$$

لدينا أيضاً : $C_2 = x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 \dots\dots\dots (3)$ ومنه نعوض(١)و(٢) في (٣):

$$C_2 = 1 - 2(1) - (1) = -2 \to -2 = x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2$$

وهي معادلة السطح المطلوبة : $\boxed{x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 + 2 = 0}$

حل مسالة الشروط للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة فصل المتغيرات:

يمكن حل مسالة الشروط للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة فصل المتغيرات وتتلخص في البحث عن الدالة المجهولة $z = z(x,y)$ على شكل جداء دالتين الأولى تتبع ل x فقط والثانية تتبع ل y فقط أي نبحث عن حل من الشكل $z = X(x).Y(y)$ عندئذ تتحول المشتقات الجزئية الى مشتقات عادية

$$z = xy \quad , \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = x'y \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = xy' \quad , \quad r = \frac{d^2z}{dx^2} = x''y$$

$$t = \frac{d^2z}{dy^2} = xy'' \quad , \quad s = \frac{d^2z}{dx.dy} = x'y'$$

ولحساب المشتقات والتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على معادلة عادية بالنسبة ل $x\,,y$ ومشتقاتها وبعملية فصل المتغيرات نحصل على معادلة تفاضلية عادية من الشكل :

$$F(x,x',x'') = G(y,y',y'') = \lambda \text{ او } -\lambda^2 \text{ او } \lambda^2$$

اذا كانت من المرتبة الأولى يكون الثابت λ

واذا كانت من المرتبة الثانية يكون الثابت λ^2 او $-\lambda^2$

انتهت المحاضرة

إعداد:بسمة نص الله * علا الدالاتي * دعاء الرحيل