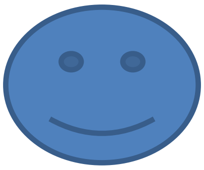
◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: الثالثة عشر ◄ العنوان: التراص في الفضاءات المترية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :



- مبرهنة تربط المجموعة المتراصة بالمجموعة المغلقة والمحدودة .
- مبرهنة تربط الفضاء المتراص بالمجموعة المتراصة .
- مبرهنة أن المجموعة المتراصة تحوي نقطة حدية .

مبرهنة: ليكن (X,d) فضاء متري و $K \subseteq X$ إذا كانت K متراصة في X فإن K مغلقة ومحدودة

البرهان : لنبرهن أولا أن K مغلقة ولنثبت أن K^c أي متممتها مفتوحة

ليكن $x_0 \in K^c$ مقابل كل $y \in K$ يوجد لدينا كرة مفتوحة $N\left(y,\frac{d(x_0,y)}{2}\right)$

من الواضح أن $x_0 \neq y \implies d(x_0,y) \neq 0 \implies \frac{d(x_0,y)}{2} \neq 0$

وأن الجماعة $\left\{N\left(y,\frac{d(x_0,y)}{2}\right); y \in K\right\}$ و هي تغطية مفتوحة ل K لأن: $K \subseteq \bigcup N\left(y,\frac{d(x_0,y)}{2}\right)$

وبالتالي بما أن K متراصة فإنها توجد تغطية جزئية منتهية في كل تغطية مفتوحة ل K مثل:

$$N\left(y_1,\frac{d(x_0,y_1)}{2}\right), \dots\dots\dots\dots, N\left(y_n,\frac{d(x_0,y_n)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow K \subseteq N\left(y_1,\frac{d(x_0,y_1)}{2}\right) \bigcup \dots\dots\dots\dots \bigcup N\left(y_n,\frac{d(x_0,y_n)}{2}\right)$$

$$x_0 \in N\left(x_0,\frac{d(x_0,y_1)}{2}\right) \dots\dots\dots\dots x_0 \in N\left(x_0,\frac{d(x_0,y_n)}{2}\right)$$

والمجموعة $\theta = N\left(x_0,\frac{d(x_0,y_1)}{2}\right) \cap \dots\dots\dots\dots \cap N\left(x_0,\frac{d(x_0,y_n)}{2}\right)$ هي مفتوحة

و $x_0 \in \theta$, $\theta \cap K = \emptyset$ لأن :

$$\theta\cap K\subseteq\theta\bigcap\left[N\left(y_1,\frac{d(x_0,y_1)}{2}\right)\bigcup\dots\dots\dots\dots\bigcup N\left(y_n,\frac{d(x_0,y_n)}{2}\right)\right]$$

$$=\left(\theta\cap N\left(y_1,\frac{d(x_0,y_1)}{2}\right)\right)\bigcup\dots\dots\dots\dots\bigcup\left(\theta\cap N\left(y_n,\frac{d(x_0,y_n)}{2}\right)\right)$$

لكن $\emptyset=\theta\cap N\left(y_i,\frac{d(x_0,y_i)}{2}\right)$

$$\theta\cap N\left(y_i,\frac{d(x_0,y_i)}{2}\right)\subseteq N\left(x_0,\frac{d(x_0,y_i)}{2}\right)\bigcap N\left(y_i,\frac{d(x_0,y_i)}{2}\right)=\emptyset$$

<u>بفرض</u>

$$z\in N\left(y_i,\frac{d(x_0,y_i)}{2}\right)\cap N\left(x_0,\frac{d(x_0,y_i)}{2}\right)\Rightarrow d(y_i,z)<\frac{d(x_0,y_i)}{2}\ \text{و}\ d(x_0,z)<\frac{d(x_0,y_i)}{2}$$

$$d(x_0,y_i)\le d(x_0,z)+d(z,y_i)<d(x_0,y_i)$$

وهذا مستحيل إذا التقاطع خالي ولا يمكن إيجاد z

$$\Rightarrow\ \theta\cap K=\emptyset\ \Rightarrow\theta\subseteq K^c, x_0\in\theta\ \Rightarrow x_0\in K^c\Rightarrow\exists\varepsilon>0: N(x_0,\varepsilon)\subseteq\theta\subseteq K^c$$

الخلاصة: من أجل $x_0\in K^c$ وجدنا $\varepsilon>0$ بحيث $N(x_0,\varepsilon)\subseteq K^c$ إذا K^c مفتوحة و K مغلقة

<u>لنبرهن أن K محدودة</u>

إن الجماعة $\{N(a,n): n\in N^*, a\in K\}$ هي تغطية مفتوحة للمجموعة K لأن

$$K\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}N(a,n)=X$$

لأنه إذا كان $x\in X$ فإنه يوجد $n\in N^*$ كبير كفاية بحيث $d(a,x)<n\ \Rightarrow\ x\in N(a,n)$

وبما أن K متراصة فإنه يوجد تغطية جزئية منتهية في كل تغطية مفتوحة **<u>مثل :</u>**

$$N(a,n_1),\dots\dots\dots,N(a,n_2),\dots\dots\dots,N(a,n_m)$$

بحيث $K\subseteq N(a,n_1)\cup\dots\dots\cup N(a,n_m)\subseteq N(a,n)\cup\dots\dots\cup N(a,n)=N(a,n)$

ولنأخذ $n=max\, n_i$ حيث $1\le i\le m$ نجد أن $K\subseteq N(a,n)\ \Leftarrow K$ محدودة .

- ملاحظة : كل مجموعة K في فضاء متري غير مغلقة أو غير محدودة تكون غير متراصة

لكن العكس غير صحيح بالضرورة أي إذا كانت K مجموعة في X ومغلقة ومحدودة فهي ليست متراصة بالضرورة

مثال عنها : ليكن (X,δ) الفضاء المتري المتقطع حيث X غير منتهية

لدينا المجموعة $\{x\}$ مفتوحة . فإن كل مجموعة جزئية في X مفتوحة ((اتحاد مجموعات مفتوحات هو مجموعة مفتوحة)) ومغلقة أيضا لأن كل متممة ل $\{x\}$ مغلقة .

فإذا كانت $K \subseteq X$ مجموعة جزئية **مغلقة ومحدودة** لأن :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 \ ; & x = y \\ 1 \ ; & x \neq y \end{cases}$$

و $a \in K$ فإن $K \subseteq N(a,2)$ لكنها ليست متراصة .... **كما ذكرنا في المحاضرة السابقة**

◄**مبرهنة:** ليكن (X, d) فضاء متري متراص و $K \subseteq X$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow K$ متراصة .

◄**الإثبات :**

لكن $\{\theta_i \,; i \in I\}$ تغطية مفتوحة للمجموعة k أي $K \underbrace{\subseteq}_{i\in I} \theta_i$ ، وبما أن K مغلقة فإن K^C مفتوحة و

$$X = K \cup K^C \subseteq (\cup\, \theta_i\,) \cup K^C$$

إذا الجماعة $\{\theta \,; i \in I\} \cup \{K^C\}$ تغطية مفتوحة للفضاء X و X مراص . إذا توجد تغطية جزئية منتهية لـ X

إما : ان تكون هذه التغطية الجزئية لا تحوي K^C

$$\Rightarrow K \subseteq X \subseteq \theta_{i_1} \cup \dots \cup \theta_{i_n}$$

أو : تكون k^c هي إحدى مجموعات التغطية الجزئية المنتهية

$$\Rightarrow K \subseteq \theta_{i_1} \cup \dots \cup \theta_{i_n} \cup K^C$$

تقاطعهم مع K .

$$\Rightarrow k = K \cap X \subseteq (\theta_{i_1} \cap K) \cup \dots (\theta_{i_n} \cap K) \cup (\underbrace{K^C \cap K}_{=\emptyset})$$

$$\Rightarrow K \subseteq (\theta_{i_1} \cap K) \cup \ldots \cup (\theta_{i_n} \cap K)$$

$$\Rightarrow K \subseteq \theta_{i_1} \cup \theta_{i_2} \cup \ldots \cup \theta_{i_n}$$

إذا K متراصة .

مبرهنة : ليكن (X , d) فضاء متري و $K \subseteq X$ مجموعة متراصة إذا كانت A مجموعة جزئية غير منتهية في K فإن K تحوي نقطة حدية لـ A .

الإثبات : ((بطريقة نقض الفرض)) :

بفرض أن K لا تحوي نقطة حدية ل A إذا كانت $x \in K$ فإن x ليست حدية لـ A

ومنه $\exists \ \varepsilon_x > 0 ; N(x , \varepsilon_x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$

ونلاحظ أن $\{N(x , \varepsilon_x) ; x \in k\}$ هي تغطية مفتوحة لـ K . وبما أن K متراصة فتوجد تغطية جزئية منتهية .

مثل: $N(x_1, \varepsilon_{x_1}) \ldots \ldots N(x_n, \varepsilon_{x_n})$

$$\Rightarrow K \subseteq N(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \ldots \ldots \cup N(x_n, \varepsilon_{x_n})$$

وبما أن A غير منتهية يمكن إيجاد $a \in A$ بحيث $a \neq x_n \ , \ a \neq x_2 \ , \ a \neq x_1$

لكن: $a \in A \subseteq K \subseteq N(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \ldots \ldots \cup N(x_n, \varepsilon_{x_n})$

$$a \in N(x_i, \varepsilon_{x_i}) \ : \ a \neq x_i \ , \quad a \in A , i = 1 \ldots . n$$

$$\Rightarrow a \in N(x_i, \varepsilon_{x_i}) \cap (A \setminus \{x_i\}) = \emptyset$$

وهذا مستحيل إذا يوجد نقطة حدية ل A في K

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو & هديل / آية & هالة مصطفى