نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :التاسعة عنوان المحاضرة:تطبيقا د.ت.م و تكامل ريمان

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

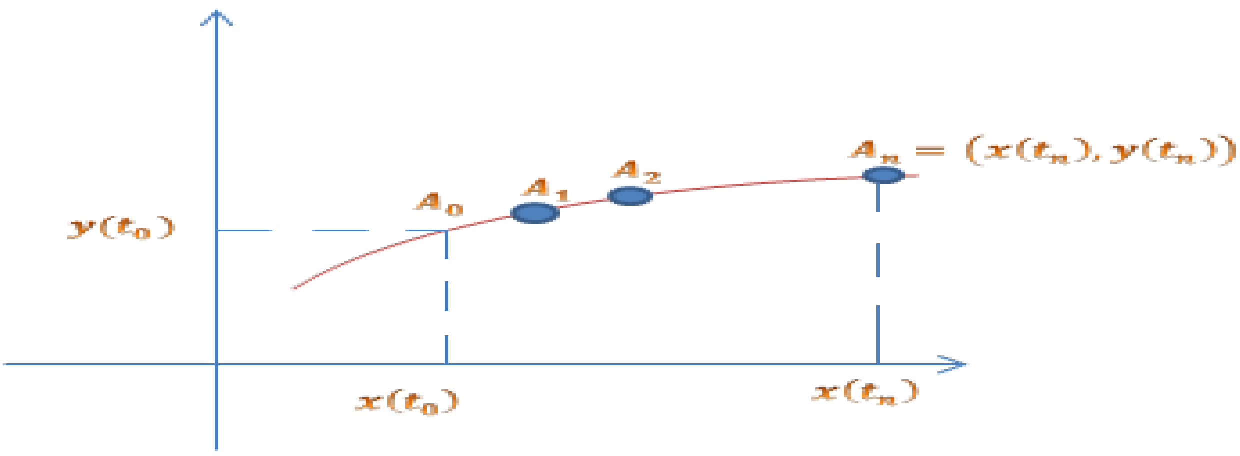
1. تطبيقات على الدوال ذات التغير المحدود
2. تكامل ريمان:
   a) تمهيد
   b) مجموع ريمان
   c) تعريف تكامل ريمان $(R)\int_a^b f\ d(x)$
   d) حساب تكامل ريمان من التعريف
   e) خواص تكامل ريمان
   f) شروط وجود تكامل ريمان

تعريف المنحني المجمع (القابل للتجميع):

1- في المستوي: اذا كان المنحني c المعرف وسيطيا

$$x(t) = v(t) \qquad y(t) = \psi(t) \qquad : t \in [\alpha, \beta]$$

و كان المنحني لا يحوي نقاطا مضاعفة (مكررة)باستثناء البداية و النهاية اذا كان مغلقا



و الأن لنأخذ التجزئة $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n = \beta\}$ و منه يتم تشكيل النقاط ونقاط التجزئة تقابلها نقاط على المنحني c و هي:

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$$
$$A_0\big(x(t_0), y(t_0)\big)$$
$$A_1\big(x(t_1), y(t_1)\big)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$A_n\big(x(t_n), y(t_n)\big)$$

بالوصل بين هذه النقاط بقطع مستقيمة نحصل على خط مكسر طول هذا الخط من A_0 الى A_nيعطى بالقانون التالي:

تذكرة:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

قانون بعد نقطتين

$$l(p) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

$$L = \sup_{P \in \mathbb{P} \in [\alpha,\beta]} l(p)$$

ومنه فإن إذا كان $L < \infty$ عندئذ أقول أن المنحني c مجمعا أو قابل للتجميع.

2- في الفراغ: ليكن المنحني c المعرف وسيطيا

$$x(t) = \upsilon(t) \qquad : t \in [\alpha, \beta]$$
$$y(t) = \psi(t) \qquad : t \in [\alpha, \beta]$$
$$z(t) = \phi(t) \qquad : t \in [\alpha, \beta]$$

و بنفس الأسلوب السابق في المستوي مع مراعات البعد الثالث ستصبح الناقط عبارة عن ثلاثيات أي

$$A_0\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$$
$$A_1\big(x(t_1), y(t_1), z(t_1)\big)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$A_n\big(x(t_n), y(t_n), z(t_n)\big)$$

و منه قانون البعد سيكون بالشكل التالي كون النقاط أصبحت ثلاثيات:

$$l(p) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2 + \big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big)^2}$$

مبرهنة جوردان:

الشرط الازم و الكافي ليكون المنحني c مجمعا هو أن تكون كلا من الدالتين $x(t), y(t)$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود على المجال $[\alpha, \beta]$ أي:

c منحني مجمع $\Leftrightarrow$ $x(t)$, $y(t)$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود على المجال $[\alpha, \beta]$

البرهان:

$\Leftarrow$ من الفرض إن c منحني مجمع أي أن $L = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(p) < \infty$ حيث :

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$$

يجب إثبات أن $V_\alpha^\beta x(t) < \infty \quad V_\alpha^\beta y(t) < \infty$

الأن سنبدأ ببعض المتراجحات التي ستسهل علينا حل و فهم البرهان

نعلم أن: $|a_k| \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ و أيضا $|b_k| \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

و منه بالاستفادة من المتراجحات السابقة إن :

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

نأخذ $\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 = a_k^2$ و $\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2 = b_k^2$

فإن حسب المتراجحات المساعدة

$$|x(t_k) - x(t_{k-1})| \le \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

و منه بأخذ المجموع من $k=1$ الى n أيضا لن تتغير صحة المتراجحة إذا:

$$\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$$

و منه فإن (1) $\quad V(x(t),P)\le l(P)$

و نفس الشيء ل b_k^2

$$|y(t_k)-y(t_{k-1})| \le \sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$$

و بأخذ المجموع من $k=1$ إلى n لن تتغير جهة المتراجحة أي أن:

$$\sum_{k=1}^{n}|y(t_k)-y(t_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$$

ومنه فإن (2) $\quad V(y(t),P)\le l(P)$

فبأخذ ال sup ل 1 و 2 فنجد أن :

$\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t)\le L<\infty$ ومنه فإن $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[\alpha,\beta]$

$\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t)\le L<\infty$ و منه فإن $y(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[\alpha,\beta]$

$\Longrightarrow$ بفرض أن $x(t)\ ,\ y(t)$ دالتين كل منهما دالة ذات تغير محدود على المجال $[\alpha,\beta]$ و يجب إثبات

إذا كان $\begin{cases}\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t)<\infty\\ \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t)<\infty\end{cases} \Longrightarrow c$ منحني مجمع

أي يجب إثبات أن $L=\sup_{P\in\mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(p)<\infty$

لإثبات هذه الحالة ايضا سنقوم بإدراج متراجحة لتساعدنا في فهم و كيفية حل هذه الحالة و لتكن

$$\sqrt{a_k^2+b_k^2} \le |a_k|+|b_k|$$

ومنه إن $l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$

بأخذ $\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2=a_k^2$ و $\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2=b_k^2$

و بالاستفادة من المتراجحة المساعدة فإن :

$$\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} \le |x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

بأخذ المجموع فإن المتراجحة تبقى محققة

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} \le \sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} \le V(x(t),P)+V(y(t),P)$$

بأخذ sup للطرفين نجد ان :

$$L \le \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t)+\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) < \infty$$

و منه فإن c منحني مجمع (قابل للتجميع) على المجال المغلق $[\alpha,\beta]$

و لبرهان مبرهنة جوردن بالفراغ نقوم بمراعاة البعد الثالث و هو z اي أن $l(P)$ ستكون كالتالي:

$$l(p)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2+\left(z(t_k)-z(t_{k-1})\right)^2}$$

و أيضا كل متراجحة ذكرناها ستكون أيضا صحيحة بمراعاة البعد الثالث z و تبرهن بنفس الأسلوب تماما.

مثال(1): أثبت ان المنحني المعين بالمعادلات

$$x = t - \sin t \qquad y = 1 - \cos t \quad : t \in [0,2\pi]$$

هو منحني قابل للتجمع ثم احسب طوله.

الحل:

حسب مبرهنة جوردان إذا كانت $y(t), x(t)$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود فيكون المحني c قابل للتجميع

نلاحظ أن $x(t) = t - \sin t$ دالة ذات تغير محدود لأن باشتقاق $x(t)$ نجد أن $x'(t) = 1 - \cos t$

محدودة على المجال $[0,2\pi]$ لأن $|x'(t)| = |1 - \cos t| \leq 1 + |\cos t| \leq 2$

ومنه $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,2\pi]$

و أيضا نلاحظ أن $y(t) = 1 - \cos t$ دالة ذات تغير محدود لأن باشتقاق $y(t)$ نجد $y'(t) = \sin t$

فإن المشتق محدود على المجال $[0,2\pi]$ لأن $|y'(t)| = |\sin t| \leq 1$ ومنه $y(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,2\pi]$

و منه فإن c منحني مجمع.

الأن لإيجاد طول المنحني من خلال قانون طول المنحني من التحليل 2 و الذي ينص على :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

تذكرة:

$$\sin^2 \frac{t}{2} = (1 - \cos t)\frac{1}{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin \frac{t}{2}\right|\, dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2}\, dt$$

كون $\sin \frac{t}{2}$ موجبة على المجال $[0,2\pi]$

$$= -4\left[\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4[-1 - 1] = 8$$

مثال (2) :

أثبت ان المنحني المعين وسيطيا $t \in [0,2\pi]$: $y(t) = \sin t$ و $x(t) = \cos t$

هو منحني مجمع ثم أحسب طوله.

الحل:

إن $x(t) = \cos t$ دالة ذات تغير محدود لأن $x'(t) = -\sin t$ محدود على المجال $[0,2\pi]$ لأن

$$|x'(t)| = |-\sin t| \leq 1$$

و $y(t) = \sin t$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,2\pi]$ لأن $y'(t) = \cos t$ محدد على المجال $[0,2\pi]$ لأن $|y'(t)| = |\cos t| \leq 1$ و حسب مبرهنة جوردان نجد ان المنحني c مجمع.

و لإيجاد طول المنحني $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

و هو المطلوب.

تكامل ريمان:

مجموع ريمان:

إذا كانت f معرفة و محدودة على المجال المغلق $[a, b]$ و إذا أخذنا التجزئة P على المجال $[a, b]$

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

تكمن المسألة الأتية في حساب المساحة المحصورة بين منحني التابع $f(x)$ و محور الفواصل و المستقيمين $x = \alpha$ و $x = b$ ومن أجل ذلك سننشئ تجزئة ما للمجال $[a, b]$ فنقسمهذه التجزئة

فينتج لدينا سطوح صغيرة نقوم بحسابة مساحتها و هي نفسها مساحة السطح المطلوب حساب مساحته

فيمكن تقريب هذه السطوح الى مستطيلات ومنه نحسب مساحة كل المستطيلات بأسلوبين

الأول: و هو بأخذ الضلع الأقصر و وصله بقطعة مستقيمة مع المستقيم الأكبر و منه ينتج مستطيل مع بقاء مساحة صغيرة أعلى المستطيل (نتجاهلها) لنحصل على

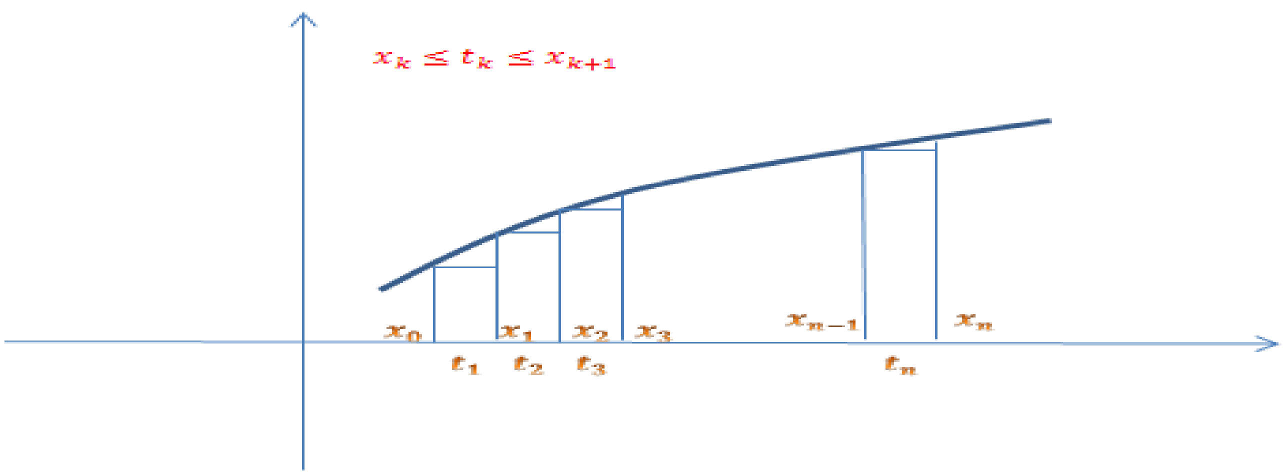
$$L(f, P) = f(x_0).(x_1 - x_0) + f(x_1).(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1}).(x_n - x_{n-1})$$

$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).(x_k-x_{(k-1)})$$ المساحة الدنيا

الثاني: هو أن نحسب المساحة المستطيل باعتبار طول المستطيل هو الضلع الأطول للسطح أي نمدد الضلع الأقصر ليكون بطول المستقيم الأخر لكن نلاحظ أن المساحة ستكون أكبر بقليل من المساحة الفعلية للسطح فتكون العلاقة :

$$U(f,P)=f(x_1).(x_1-x_0)+f(x_2).(x_2-x_1)+\cdots+f(x_n).(x_n-x_{n-1})$$

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k).(x_k-x_{k-1})$$ المساحة العليا



و باختيار t_k حيث $x_{k-1}\le t_k\le x_k$ ينتج لدينا .

$$S(f,P)=f(t_1).(x_1-x_0)+f(t_2).(x_2-x_1)+\cdots+f(t_n).(x_n-x_{n-1})$$

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k).(x_k-x_{k-1}):\quad x_{k-1}\le t_k\le x_k$$

و هو مجموع ريمان الذي سنقوم باستخدامه و يكفي قول مجموع ريمان للإشارة إليه

و يحقق المتراجحة التالية : $L(f,P)\le S(f,P)\le U(f,P)$

- نقول عن f أنه كمول (قابل للمكاملة) اذا تحقق

$$\lim_{\Delta x\to 0}(U-L)=0\ :\ ||P||=\lambda P=\Delta x=\max_{1\le k\le n}(\Delta\, x_k)$$

ملاحظة إذا كانت التجزئة المأخوذة منتظمة تكون $\Delta x=\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$

أي أن عندما تسعى Δx للصفر فإن n تسعى لل ∞ أي:

$$\Delta x\to 0\Longrightarrow n\to\infty$$

و عندها تؤول النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}(U-L)=0$ الى النهاية $\lim_{n\to\infty}(U-L)=0$

- نقول عن f أنه كمول (قابل للمكاملة) إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x\to o}\sum_{k=1}^{n}f(t_k).\Delta x_k=A$$

حيث $\Delta x=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ و يرمز لهذه النهاية $A=\int_a^b f(x)\ dx$

سنقوم بذكر بعض الملاحظات :

$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $\sum_{i=1}^{n}c=c+c+c+\cdots+c=n\,c$ (n مرة)

$\sum_{i=1}^{n}c\,a_i=c\,\sum_{i=1}^{n}a_i$, $\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i+\beta b_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i+\beta\sum_{i=1}^{n}b_i$

$$\sum_{i=1}^{n}i=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي