نظري

◄ دكتورة المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: الحادية عشر   عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية

المحتوى العلمي :

١ـ المعادلات التفاضلية الجزئية
٢ـ بعض التعاريف للمعادلات التفاضلية الجزئية
٣ـ منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية

المعادلات التفاضلية الجزئية

لقد مر معنا سابقاً تعريف المشتق الجزئي بالنسبة لمتغير ما حيث كان:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}$$

حيث أن الدالة z تابعة للمتغيرين x, y المستقلين حيث أطلقنا عليه اسم المشتق الجزئي للدالة z بالنسبة للمتغير x مشتق من المرتبة الأولى كذلك الأمر بالنسبة ل y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x,y)}{\Delta y}$$

المشتق الجزئي للدالة z من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير y وذلك باعتبار x ثابتة كما أن

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1}\partial x}$$

المشتق من المرتبة n بالنسبة ل $x||y$ **ومنه يأتي تعريفنا للتفاضل الكلي :**

١- يعطى تعريف التفاضل الكلي للسطح $F(x,y,z) = 0$ التابع لثلاث متغيرات مستقلة بالعلاقة:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالنسبة للسطح الذي يتعلق ب n متغير

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots, x_n) = 0$$

فإن تفاضله التام هو $dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \dots\dots\dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n = 0$

٢- لدينا حالة خاصة في حال كان السطح تابع للمتغيرين المستقلين x, y بحيث $z = z(x, y)$

$$dZ = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$$

٣- في حال كان x, y تابعان للوسيط t بحيث: $x = x(t)\ \&\&\ y = y(t)$ عندها يكون:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 0$$

حيث أخذنا تفاضل x التام بالنسبة ل t لأن x تتبع ل t فقط فيكون تفاضلها تام وليس جزئي أما في حال كانت x تابعة لمتغيرين فعندها نأخذ مشتق جزئي و هذا ما سنجده في الحالة التالية

٤- إذا كانت $Z = Z(x, y)$ وكانت $x = x(t_1, t_2)\ \&\&\ y = y(t_1, t_2)$ فإن:

$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t_1}\quad \&\&\quad \frac{\partial z}{\partial t_2} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

٥- في حال كانت $F(x, y) = 0$ دالة ضمنية وكانت y تابعة ل x عندئذ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

طيب ومن وين جبناه....؟؟؟ حسب التفاضل التام للسطح F

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 : F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = -\frac{\partial F}{\partial y}dy \xrightarrow{\text{نقسم على } dx} \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

٦- إذا كانت $F(x, y, z) = 0$ وكانت $z = z(x, y)$ عندها :

من وين جبناه....؟؟؟

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad \&\&\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

لدينا $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$ حيث

تابع ل x, y: $z = z(x,y)$ ومنه $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

بتعويض dz في مفاضلة F $\Leftarrow$ $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right] = 0$

بإخراج dx , dy عامل مشترك نجد:

$$dF = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{=0} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{=0} dy = 0$$

بالمطابقة بين الطرفين فإن $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

وكذلك $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

بعض التعاريف:

١- **المعادلة التفاضلية الجزئية:** نسمي كل معادلة تفاضلية تحتوي على مشتق جزئي واحد على الأقل بمعادلة تفاضلية جزئية ونرمز لها ب (م.ت.ج)

٢- نقول عن الدالة $u(x,y)$ أنها حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية إذا حصلنا على مطابقة للطرفين وذلك بعد التعويض في المعادلة التفاضلية

٣- **الحل التام كما درسنا تعريفه سابقاً :** هو مجموعة من الدوال المستقلة الاختيارية (لأننا نختار قيمة للثابت c)وعددها يساوي رتبة المعادلة (عدد متغيرات الدالة)

٤- **الحل الخاص:** هو الحل الذي ينتج عن الحل العام وذلك بإعطاء الثابت قيمة عددية.

٥- **الحل الشاذ:** هو الحل الذي لا ينتج من الحل العام بإعطاء الثوابت قيمة عددية.

ملاحظة : إن كل حل للمعادلة التفاضلية يمثل سطحاً ندعوه بالسطح التكاملي للمعادلة

ليكن لدينا الدالة $z = z(x,y)$ حيث $G(x,y,z,p,q) = 0$ شكل المعادلة

التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى وإن $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ && $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ وإن

$G(x,y,z,p,q,r,St)$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية بحيث:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \;\&\&\; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \;\&\&\; S \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية :

إن معظم المعادلات التفاضلية الجزئية التي مرت معنا هي عبارة عن معادلة جبرية لكنها تحوي على عدد من الوسطاء وبحذف هذه الوسطاء نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية وهذه الوسطاء إما أن تكون **ثوابت كيفية أو دوال كيفية.**

أولاً: في حال كانت الوسطاء ثوابت كيفية :

١- قد تكون العلاقة الجبرية تحوي على ثابت اختياري واحد فقط فتكون من الشكل $F(x,y,z,C_1) = 0$ عندئذ نحذف الثابت باتباع الخطوات التالية:

٢- نشتق بالنسبة ل x فنحصل على المعادلة رقم (١) حيث : $p = \frac{\partial z}{\partial x}$: $G_1(x,y,z,p) = 0$

٣- نشتق بالنسبة ل y فنحصل على المعادلة رقم (٢) حيث: $q = \frac{\partial z}{\partial y}$: $G_2(x,y,z,q) = 0$

من المعادلتين (١) و (٢) نقوم بحذف الثابت وفي المثال يتضح المقال:

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من المعادلة الجبرية التالية:

$$z = Cxy$$

نلاحظ أن z عبارة عن علاقة تربط بين (الثابت$x\&y\&C$) نوجد المشتق بالنسبة ل x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P = Cy \Longrightarrow C = \frac{P}{y} \dots \dots \dots (1)$$

نوجد المشتق بالنسبة ل y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = Cx \Longrightarrow C = \frac{q}{x} \dots \dots \dots (2)$$

بالمساواة بين (١) و(٢) نجد : $\frac{p}{y} = \frac{q}{x} \to yq = xp$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة ....

ثانيا: في حال العلاقة الجبرية تحوي على ثابتين اختياريين $F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ في هذه الحالة :

١- نشتق العلاقة بالنسبة ل x ومنه : $G_1(x, y, z, p) = 0 \dots \dots \dots (1)$
٢- نشتق بالنسبة ل y ومنه $G_2(x, y, z, q) = 0 \dots \dots \dots (2)$
٣- ثم نقوم بعزل الثوابت من (١) و(٢) وتعويضها في المعادلة الأصلية .

مثال:

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 + z^2 = 1$

الحل:

نلاحظ وجود ثابتين وبالتالي نتبع الخطوات السابقة :

نشتق بالنسبة ل x

$$2(x - C_1) + 2zp = 0 : z = z(x, y) \;\&\&\; p = \frac{\partial z}{\partial x} \to (x - C_1) = -zp$$

لنوجد المشتق بالنسبة ل y

$$2(y - C_2) + 2zq = 0 \to (y - C_2) = -zq$$

نعوض المشتقات في المعادلة الأصلية ومنه :

$$(-zp)^2 + (-zq)^2 + z^2 = 1 \to z^2p^2 + z^2q^2 + z^2 = 1 \xRightarrow{\text{باخراج } z^2 \text{ عامل مشترك}}$$

وهي المعادلة التفاضلية المرجوة $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$

في حال كانت العلاقة تحوي على ثلاث ثوابت اختيارية $F(x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0$
نشتق F بالنسبة ل x $G_1(x, y, z, p) = 0$
نشتق F بالنسبة ل y $G_2(x, y, z, q) = 0$

ثم نشتق G_1 بالنسبة ل x,y أي نوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

وكذلك نشتق G_2 بالنسبة ل x,y

مثال : أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من المعادلة الجبرية التالية: $ax + by + cz = 1$

الحل:

١- نشتق بالنسبة ل x ومنه $G_1 = a + cp = 0 : p = \frac{\partial z}{\partial x}$

٢- نشتق بالنسبة ل y ومنه $G_2 = b + cq = 0 : q = \frac{\partial z}{\partial y}$

٣- نشتق G_1 بالنسبة ل x ومنه : $c.r = 0 : r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

٤- نشتق G_1 بالنسبة ل y ومنه : $cS = 0 : S = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

٥- نشتق G_2 بالنسبة ل x ومنه : $cS = 0 \; : \; S = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

٦- نشتق G_2 بالنسبة ل y ومنه : $cb = 0 \; : b = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

و هي المعادلة المطلوبة........

الخلاصة من أولاً:

١- إذا كان عدد الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتغيرات المستقلة فإننا نحصل على معادلة تفاضلية جزئية تقبل المعادلة الجبرية حلاً لها.

٢- إذا كان عدد الثوابت الاختيارية يزيد أو يقل عن عدد المتغيرات المستقلة فإننا نحصل على معادلات تفاضلية جزئية تقبل المعادلة الجبرية حلاً لها.

انتهت المحاضرة

لاشيء يحدث عبثاً.. داخل كل قدر سرّ.. يمهد الطريق لقدر آخر..

إعداد:بسمة نصر الله *علا الدالاتي *دعاء الرحيل

تنسيق: ولاء الأخضر♥