الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي – جامعة دمشق
كلية العلوم – قسم الرياضيات

اختبار الفصل الأول
السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل 5

التاريخ: ٥/١/٢٠١٧
الوقت : ٢ - ٤
الاسم:

السؤال الأول(20 درجة): عرّف ما يلي بالتفصيل(مع توضيح جميع الرموز):

الدالة ذات التغير المحدود على المجال [a,b] ، **تكامل** استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على المجال [a,b]، **القياس** μ في الفضاء (X,Ω,μ)، **تكامل** لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ.

السؤال الثاني (20 درجة): **أثبت** أنه إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $|f(x)|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك بمثال.

السؤال الثالث(20 درجة): احسب التغير الكلي لكل من الدوال الآتية (مع الرسم):

$f(x)=x^2-x \quad : \quad x\in[0,5] \quad , \quad f(x)=x-|x|: \quad x\in[-5,5]$ 10

$\frac{41}{2}$

$f(x)=\sin x: \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad , \quad f(x)=|x|: \quad x\in[-3,3]$ 6

1

السؤال الرابع (40 درجة): احسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم g(x) :

1. $\int_0^3 (x^2+1)dg(x): \quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)d(x^2+1): \quad g(x)=[x]$

17 13

2. $\int_{-2}^{2} x^2 dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 2 \end{cases}$ $\frac{34}{3}$

3. $\int_0^6 x^2 dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x<2 \\ 2 & 2\le x<4 \\ 3 & 4\le x\le 6 \end{cases}$ 20

4. احسب التكامل (مستخدماً تعريف تكامل لوبيغ) في فضاء القياس (X,Ω,μ):

$$\int_{[0,4]} [x]d\mu$$ 6

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

1/

" سُلّم تصحيح تحليل ٥ "

السؤال الأول :

① تعريف الدالة ذات التغير المحدود على المجال $[a,b]$.

إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a,b]$ ، وكانت P تجزئة عشوائية لهذا المجال $[a,b]$ ، ولتكن:

$$P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b\}$$

ونأخذ المجموع

$$V(P,f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$ ②

ثم نأخذ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f=\sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} V(P,f)$$ ② التغير الكلي للدالة f

فإذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}}f<\infty$ ① فإننا نسمي f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

---

② تعريف تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة للدالة g على $[a,b]$.

إذا كانت f و g دالتين معرفتين محدودتين وحقيقيتين على $[a,b]$.

وأخذنا التجزئة العشوائية P لـ $[a,b]$ ،

$$P=\{x_0, x_1, x_2, \dots x_n : x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b\}$$

عندئذ نعرف المجموع (استيلجس)

$$S(P,f,g)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta g_k \quad ; \; t_k\in[x_{k-1}, x_k]$$ ①

$$; \; \Delta g_k = g(x_k)-g(x_{k-1})$$ ①

نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g على $[a,b]$ إذا وجد A حيث $\mathbb{R}\to A$

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta g_k=\int_a^b f\,dg = A$$ ②

$$\|P\|\longrightarrow 0 \quad ; \; \|P\|=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k \quad ; \; \Delta x_k=x_k-x_{k-1}$$ ①

٢/

③ تعريف القياس μ في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

إذا كانت $X \neq \Phi$ ، $\mathcal{A}$ جبر تام على X . نعرف القياس μ بأنه تابع $\mu : \mathcal{A} \xrightarrow{①} \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ يحقق شرطين

1) $\mu(\Phi) = 0$ ①

2) $\forall A_i \in \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \Phi \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
$i \in N$ ① $i \neq j$ ②

④ تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ يُعرف بالشكل

② $\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$

① حيث c_i قيم التابع البسيط f .

① و A_i تشكل تجزئة لـ X ، وتعطى بالشكل

$A_i = \{x \in X : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$ ①

السؤال الثاني :

f د. ت. م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$.

f د. ت. م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $\bigvee_a^b f < \infty$

$\big|\, |f(x_n)| - |f(x_{n-1})| \,\big| \leq |f(x_n) - f(x_{n-1})|$ ④

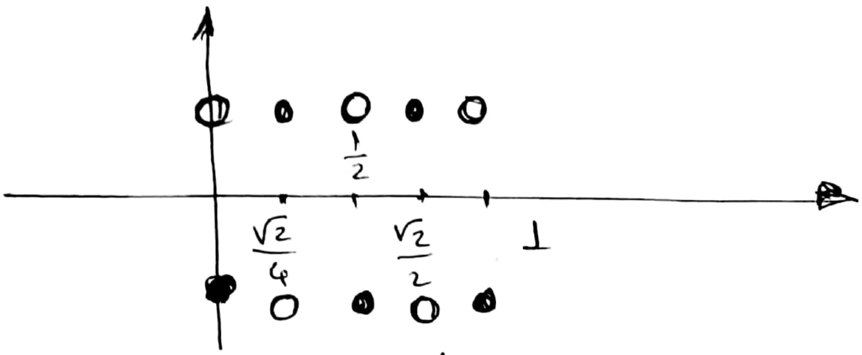
$\sum_{k=1}^{n} \big|\, |f(x_n)| - |f(x_{n-1})| \,\big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_n) - f(x_{n-1})|$ ④

$\bigvee_a^b |f| \leq \bigvee_a^b f < \infty$ ②

وهذا يعني أن $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$. وهو م.

ملاحظة: $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$ $\not\Rightarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$

مثال: لنأخذ الدالة f المعرفة على $[0,1]$ المعينة بالشكل



$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(1) بما أن $|f(x)|=1$ دالة ثابتة على $[0,1]$. فهي دالة د.ت.م

(2) على $[0,1]$ والتغير يساوي صفر.

(3) نأخذ التجزئة . $P = \{x_0, x_1, \dots x_n \mid$

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = 1\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \cdots & \mathbb{Q} \\ f(x) \to & (-1) & 1 & (-1) & & (-1) \end{array}$$

$$V(P,f) = |1-(-1)| + |-1-1| + \cdots + |-1-1|$$

$$= 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty \Rightarrow$$

f ليست د.ت.م على $[0,1]$.

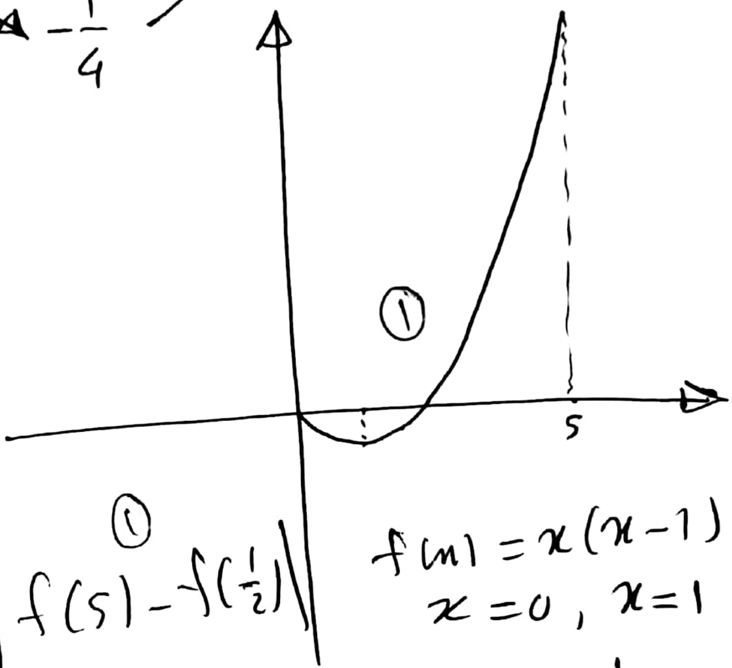
(السؤال الرابع)

ع/

$f(x) = x^2 - x \quad : x \in [0,5]$ (1)

$f'(x) = 2x - 1 \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
$f'(x)$	$- \; - \; -$		0	$+ \; + \; + \; + \; +$	
		$0 \searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow 20$	



$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$f(5) = 25 - 5 = 20$

$\bigvee_0^5 f = \bigvee_0^{\frac{1}{2}} f + \bigvee_{\frac{1}{2}}^5 f$ (1)

$f(x) = x(x-1)$

$x = 0, \ x = 1$

$\bigvee_0^5 f = \left|f(0) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| + \left|f(5) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|$ (1) (1)

$= \left|0 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)\right| + \left|20 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4} + 20 + \frac{1}{4}$

$= 20\frac{1}{2} = \frac{41}{2}$. (1)

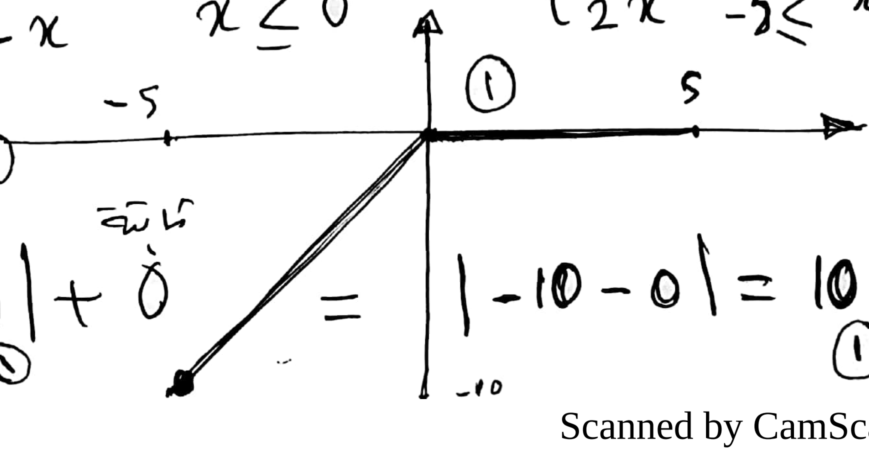
---

(5)

$f(x) = x - |x| \quad : x \in [-5,5]$

$= x - \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$ (1) $= \begin{cases} 0 & 5 \ge x > 0 \\ 2x & -5 \le x \le 0 \end{cases}$

$\bigvee_{-5}^5 f = \bigvee_{-5}^0 f + \bigvee_0^5 f$ (1)



ثابتة

$= |f(-5) - f(0)| + 0 = |-10 - 0| = 10$ (1) (1)

5

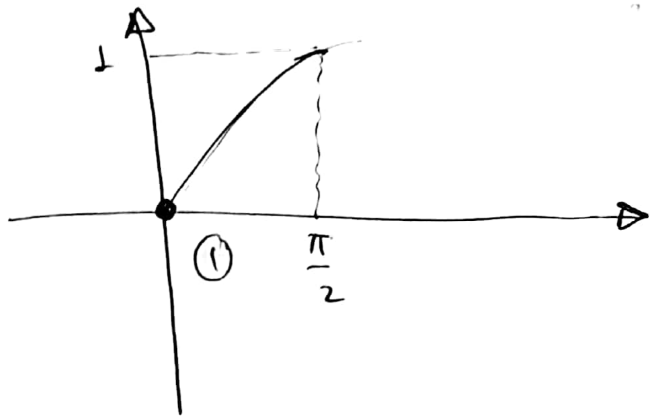
السؤال الثالث:

$f(x) = \sin x \ ; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

تابع متزايد ،

$\overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{V}} f = |f(\frac{\pi}{2}) - f(0)|$ (2)

$= |1 - 0| = 1$ (2)



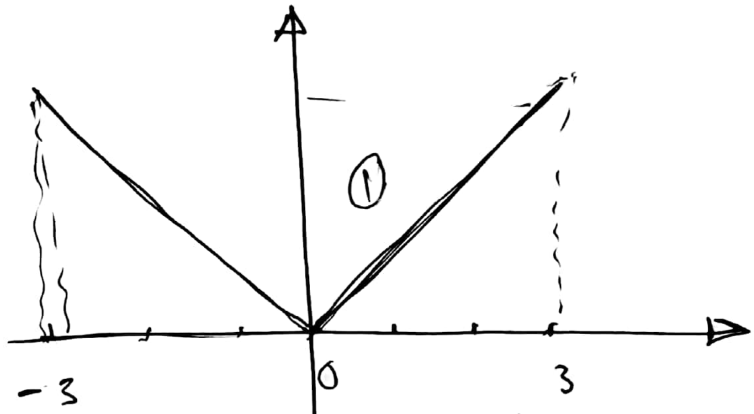
$f(x) = |x| \ ; x \in [-3, 3]$

$\overset{3}{\underset{-3}{V}} f = \overset{0}{\underset{-3}{V}} f + \overset{3}{\underset{0}{V}} f$ (1)

$= |f(0) - f(-3)|$ (1)

$+ |f(3) - f(0)|$ (1)

$= |0 - 3| + |3 - 0| = 6$ (1)



السؤال الرابع

$\int_{[0,4]} [x]\, d\mu = 0\,\mu[0,1[+ 1\,\mu[1,2[+ 2\,\mu[2,3[$ (4)

$+ 3\,\mu[3,4[+ 4\,\mu[4,4]$

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ 3 & 3 \le x < 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases}$$

$= \cancel{0(1)} + 1(1) + 2(1)$

$+ 3(1) + \cancel{4(0)}$

$= 6$

7 / $\boxed{1}$

سؤال الأول

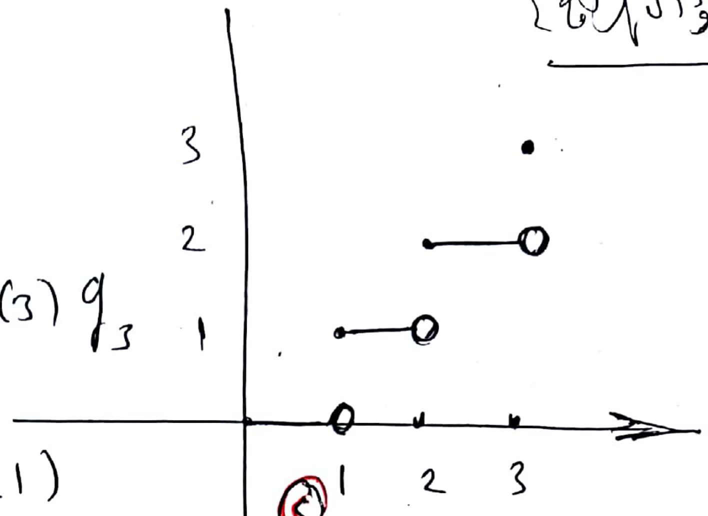
$$\int_0^3 (x^2+1)\, d[x] =$$

$$f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\, g_3$$

$$= 2(1) + 5(1) + 10(1)$$

$$= 17$$

7



C

$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3$

$$\int_0^3 g(x)\, d(x^2+1) = \left[f(x)\, g(x)\right]_0^3 - \int_0^3 f(x)\, dg(x)$$

C

$$= \left[(10)(3) - 0\right] - 17 = 13$$

$\boxed{2}$

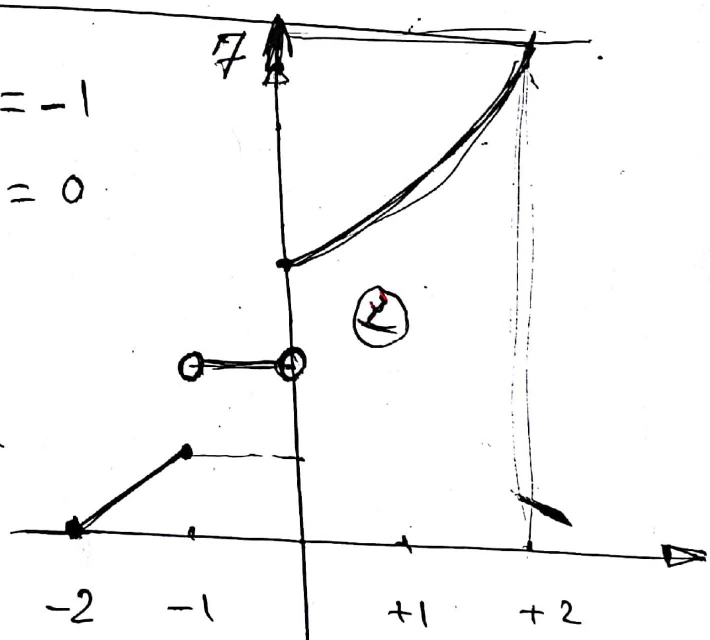
$c_1 = -1$

$c_2 = 0$

$$I = \int_{-2}^{2} x^2\, d\, g(x)$$

$$= \int_{-2}^{-1} x^2 (1)\, dx + \int_{-1}^{0} x^2 (0)\, dx$$

$$+ \int_0^2 x^2 (2x)\, dx$$



C

0

$$+ f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right] + f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^2 + 1\,(2-1) + 0$$

1

$$= \frac{1}{3}\left[-1+8\right] + \frac{1}{2}(16) + 1 = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}$$

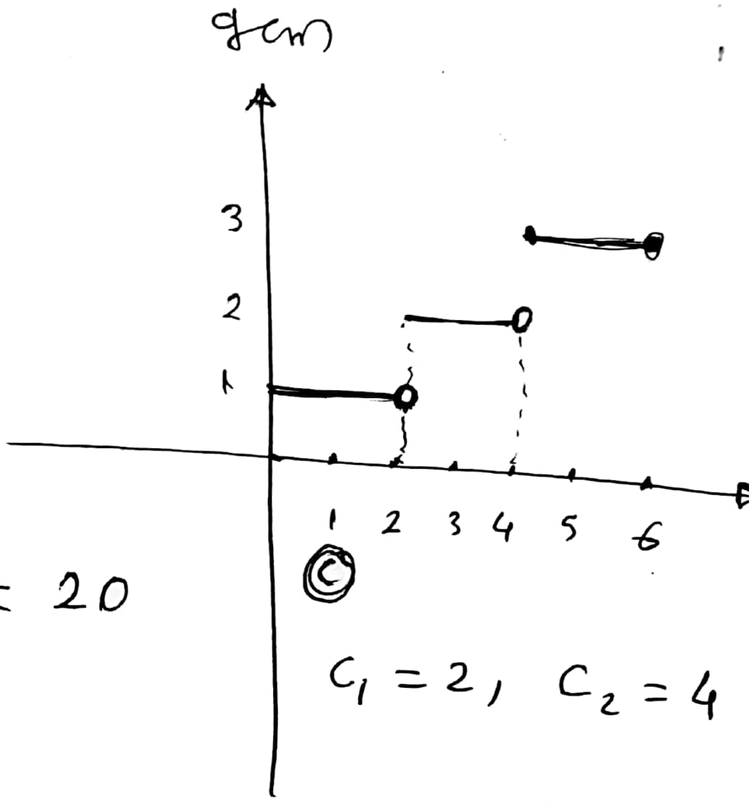
1

$\boxed{3}$ $\int_0^6 x^2 \, d\,gcm$

$$I = \int_0^6 x^2 \, d\,gcm$$

$$= f(2) \cdot g_1 + f(4) \cdot g_2$$

$$= 4(1) + 16(1) = 20$$



$c_1 = 2, \; c_2 = 4$

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي – جامعة دمشق
كلية العلوم – قسم الرياضيات

اختبار الفصل الأول
المادة: تحليل 5
السنة الثالثة: رياضيات

التاريخ: ٣/١/٢٠١٤م
المدة: ساعتان
الاسم:

السؤال الأول(40 درجة):

1. عرّف ما يلي بالتفصيل(مع توضيح جميع الرموز):

الدالة ذات التغير المحدود على المجال [a,b] ، **تكامل** استيلجس للدالة f بالنسبة لـــ g علـــى المجال [a,b]، **القياس** μ في الفضاء (X,Ω,μ)، **تكامل** لوبيغ للتـــابع البســـيط f علـــى X بالنسبة للقياس μ.

2. **بيّن** أنه إذا كانت الدالتان f , g متزايدتين على المجال [a,b] فإن f+g دالة متزايـــدة على المجال [a,b]، لكن (دالة الفرق) f-g و (دالة الجداء) f*g ليس بالضرورة.

السؤال الثاني(20 درجة): إذا كانت f دالة معرفة على المجال [0,1/2] كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

والمطلوب:

1. بين أن f مستمر على [0,1/2]
2. وضح أن f متزايدة [0,1/2]
3. هل f د.ت.م ثم أوجد التغير الكلي
4. بين أن f لا تحقق شرط ليبشتز k=1

السؤال الثالث(20 درجة): احسب تكاملي استيلجس (I_1,I_2) مع الرسم لـــ$\alpha(x)$:

$$I_1=\int_{-2}^{2}x^2d\alpha(x):\quad \alpha(x)=\begin{cases}x+2 & -2\le x\le -1\\ 2 & -1\prec x\prec 0\\ x^2+3 & 0\le x\le 2\end{cases}\qquad , \qquad I_2=\int_{0}^{4}x^2d\alpha(x):\quad \alpha(x)=[x]$$

السؤال الرابع(20 درجة):

1. برهن صحة العبارة في فضاء القياس (X,Ω,μ):

$$\forall A,B\in\Omega \qquad \Rightarrow \quad \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$

2. إذا كانت X={a,b,c,d} و τ ={{a,b},{d}} أوجد أصغر حلقة وأصغر جبر علـــى X يحوي τ.

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

1

سلّم تصحيح " تحليل ٥ "

السؤال الأول :

① الدالة ذات التغير المحدود على المجال $[a,b]$: إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a,b]$ ، وكانت P تجزئة عشوائية لهذا المجال

$$P = \{ x_0 , x_1 , x_2 , \dots x_n \; ; \; x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b \}$$

نأخذ المجموع

$$V(P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

التغير الكلي للدالة f :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(P)$$

فإذا كانت $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ فإننا نسمي f د.ت.م على $[a,b]$

② إذا كانت f , g دالتين معرفتين ومحدودتين وحقيقيتين على $[a,b]$.

نأخذ التجزئة العشوائية

$$P = \{ x_0 , x_1 , \dots x_n \; ; \; x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b \}$$

عندئذ نعرف مجموع استيلجس

$$S(P,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k$$

حيث $t_k \in [x_{k-1} , x_k]$; $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$

نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g على $[a,b]$ إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall \epsilon > 0 , \exists P_\epsilon \; [a,b] : P \supset P_\epsilon \Rightarrow | S(P,f,g) - A | < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k = \int_a^b f \, dg = A$$

حيث $\|P\| = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

③ إذا كانت $X \neq \Phi$ ، وكان $\mathcal{A}$ جبر تام على X . نعرف التابع $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$

نقول عن التابع μ إنه قياس إذا حقق الشرطين

1) $\mu(\Phi) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A} , \; i \in \mathbb{N} \; : \; A_i \cap A_j = \Phi , \; i \neq j \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

④ تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ يمثل الشكل

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$$

; $\{c_i\}_{i=1,n}$ قيم التابع f ، A_i تمثل تجزئة لـ X ، $A_i = \{ x \in X : f(x) = c_i \} = f^{-1}(c_i)$

c/

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ متزايدة} \\ g \text{ متزايدة} \end{array}\right\} \Rightarrow (f+g) \text{ متزايدة}$$

f متزايدة : $\left.\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in [a,b] \\ x_1 < x_2\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

g متزايدة : $\left.\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in [a,b] \\ x_1 < x_2\end{array}\right\} \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

$$\Rightarrow f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2)$$

$$(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2) \quad : \quad x_1 < x_2$$

أي أن $f+g$ دالة متزايدة.

مثال ①: دالة المجموع $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ على المجال $[0,1]$ دالتين متزايدتين بينما

$$\psi(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x^2 - x = x(x-1)$$

دالة غير متزايدة على $[0,1]$ لأن

$\psi'(x) = 2x - 1$

$\psi'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
إشارة $\psi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\psi(x)$	0	متناقصة ↘	$-\frac{1}{4}$	متزايدة ↗	0

مثال ②: دالة الجداء $f(x) = x$, $g(x) = x-1$ على $[0,1]$

$$\psi(x) = x(x-1)$$

نحصل على دالة (مثل الدالة السابقة) غير متزايدة على $[0,1]$.

نستنتج أنه:

f متزايدة , g متزايدة $\Rightarrow$ $f+g$ متزايدة

بينما ليس بالضرورة $\left\{\begin{array}{l} f-g \text{ متزايدة} \\ f \cdot g \text{ متزايدة} \end{array}\right.$

٣

ثانياً الاتصال :

$x_0 \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow$

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln x_0} = f(x_0)$ 1

② $x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -\frac{1}{\ln x} = 0 = f(0)$ c

③ $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2})$ c

وبالتالي تابع مستمر على $[0, \frac{1}{2}]$.

$f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0 \; ; x \in]0, \frac{1}{2}[$

x	0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+ \quad + \quad +$	
$f(x)$	0	متزايد . $\nearrow$	$\frac{1}{\ln 2}$

0

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}}$
$= -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2}$
$= \frac{1}{\ln 2} > 0$

---

③ f دالة متزايدة (مطردة) على مجال محدود فهي د. ت. م .

التغير الكلي $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left| \frac{1}{\ln 2} - 0 \right| = \frac{1}{\ln 2}$ 0

---

④ شرط ليبشتز ساحل $k=1$

$\forall u, v \in [0, \frac{1}{2}], \exists L > 0 : |f(u) - f(v)| \le L |u - v|$

لنبين أنه هناك u, v من أجلها لا يوجد L يحقق الشرط بعد

نأخذ $v = 0$, $u \overset{>}{\to} 0$ ولنبين أنه لا يوجد L بحيث $\lim_{u \to 0} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \le L$.

$u, v \in [0, \frac{1}{2}]$

0

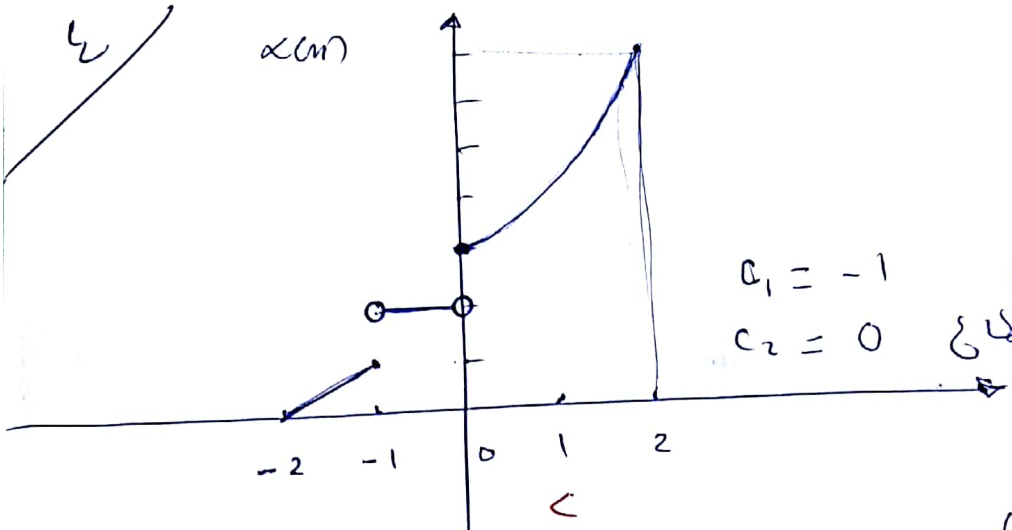
$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\left| -\frac{1}{\ln x} - 0 \right|}{x - 0} = -\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x \ln x}$

$= -\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$ إذاً لا يوجد L

Scanned by CamScanner

ع

السؤال الثاني



$$\alpha(x) = \begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1 \\ 2 & -1< x< 0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

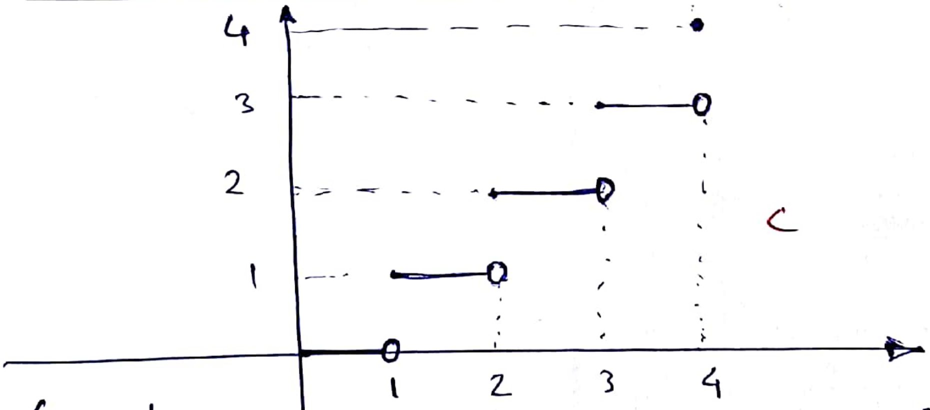
$c_1 = -1$
$c_2 = 0$ نقاط الانقطاع

$$I = \int_{-2}^{2} x^2\, d\alpha(x) = \int_{-2}^{-1} x^2(1)\, dx + \int_{-1}^{0} x^2(0)\, dx + \int_{0}^{2} x^2(2x)\, dx$$

$$+ f(-1)\left[\alpha(-1+0) - \alpha(-1-0)\right] + f(0)\left[\alpha(0+0) - \alpha(0-0)\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^2 + 1\left[2-1\right] + 0$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 8 + 1 = \frac{34}{3}$$



$\alpha(x) = [x]$

$c_1 = 1$, $c_2 = 2$

$c_3 = 3$, $c_4 = 4$

اربع نقاط انقطاع

$\alpha_k = 1$ مقدار القفزة

$$\int_0^n f(x)\, d\alpha(x) = \int_0^4 f(x)\, d[x] = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\cdot\alpha_k$$

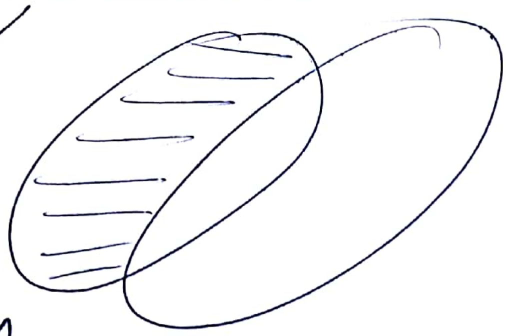
$$\alpha_k(c_k) = \alpha(k+0) - \alpha(k-0)$$

$$\int_0^4 x^2\, d[x] = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + f(4)\cdot 1$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

0

نموذج الإجابة :



A

B

(1)

$\mu(A \cup B) = \mu((A \setminus B) \cup (B))$

$= \mu(A \setminus B) + \mu(B)$ مقياس :

$= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B)$

$= \underbrace{\mu(A) - \mu(A \cap B)}_{\text{لأن}} + \mu(B)$

$A \cap B \subseteq A$

و . هـ . م

1.

$(A \setminus B) \cup (B) = (A \cup B)$

$A \setminus B \cap B = \phi$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \Rightarrow$

$A \cap B \subseteq A$

$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$

---

(2)

$X = \{a, b, c, d\}$

$\tau = \{\{a, b\}, \{d\}\}$

أصغر حلقة

$\tau_1 = \{\phi, \{a, b\}, \{d\}, \{a, b, d\}\}$

$\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau$ تحقق شروط الحلقة

$\forall A \setminus B \in \tau \Rightarrow A \setminus B \in \tau$ $\quad \phi \in \tau$

0

أصغر جبر

$\tau_2 = \{\phi, X, \{a, b\}, \{c, d\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{c\}\}$

0

حلقة الصفات الجزئية أعلاه

جبر

و . هـ . م

Scanned by CamScanner

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة دمشق –كلية العلوم

اختبار الفصل الثاني
السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل 5

التاريخ: الأربعاء 2015/6/17م
الوقت : 2-4
الاسم:

السؤال الأول (20 درجة): إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $|f(x)|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك.

السؤال الثاني (30 درجة): أثبت أولاً أن كلاً من الدوال الآتية ذات تغير محدود، ثم أوجد التغير الكلي لكل دالة مع الرسم:

1. $f(x)=x^2-x \quad : \quad x\in[0,3]$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ x+2 & 1\le x\le 2\end{cases}$

3. $f(x)=x-|x| \quad : \quad x\in[-2,2]$

السؤال الثالث (30 درجة): احسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^3 (x+1)dg(x): \quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)d(x+1): \quad g(x)=[x]$

2. $\int_{-3}^{3}(x^2+1)dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -3\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 3\end{cases}$

3. $\int_1^5 x^2dg(x): \quad g(x)=\begin{cases} 0 & x=1 \\ 1 & 1<x<3 \\ 4 & 3\le x\le 5\end{cases}$

السؤال الرابع (20 درجة): عرّف القياس وعرّف تكامل لوبيغ للتابع البسيط على فضاء القياس (X,Ω,μ). ثم احسب التكامل (مستخدماً تعريف تكامل لوبيغ):

$$\int_{[0,3]}[x]d\mu$$

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

سلم تصحيح تحليل ٥

السؤال الأول:

① f د.ت.م على [a,b] ⟸ |f| د.ت.م على [a,b] .

$$\bigvee_a^b f = \sup_{P\in \mathcal{P}[a,b]} V(f,P) < \infty \Leftarrow \text{f د.ت.م على } [a,b]$$

حيث

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

و P تجزئة لـ [a,b]

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

$$\big|\,|f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\,\big| \le |f(x_k) - f(x_{k-1})| \; : k=\overline{1,n}$$

من خواص المتراجحات .

$$\sum_{k=1}^{n} \big|\,|f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\,\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\bigvee_a^b |f| \le \bigvee_a^b f < \infty$$

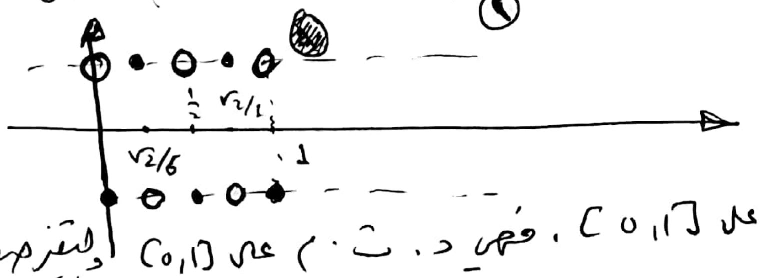
وهذا يعني أن |f| د.ت.م على [a,b] . و.هـ.م

---

② |f| د.ت.م على [a,b] $\not\Rightarrow$ f د.ت.م على [a,b] العكس لا

مثال: لنأخذ الدالة f المعرفة على [0,1] المعينة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



① إن $|f(x)| = 1$ دالة ثابتة على [0,1] ، فهي د.ت.م على [0,1] والتي هي

② لنأخذ التجزئة

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n : 0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = 1\}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{array}$$

$$f(x) \longrightarrow (-1) \quad (1) \quad (-1) \quad (-1)$$

c/ $V(f,P) = \underbrace{|1-(-1)| + |-1-1| + \dots + |-1-1|}_{n \text{ عددها}}$

$= 2 + 2 + \dots + 2 = 2n$

2

$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$

وبالتالي f ليست د.ت.م .

السؤال الثاني:

$\boxed{1.\ f(x) = x^2 - x}$ $: x \in [0,3]$

4

نعلم أن x^2 دالة متزايدة على $[0,3]$.

, x = = على $[0,3]$.

وبالتالي $f(x)$ دالة ممثلة على شكل فرق دالتين متزايدتين وبالتالي f د.ت.م .

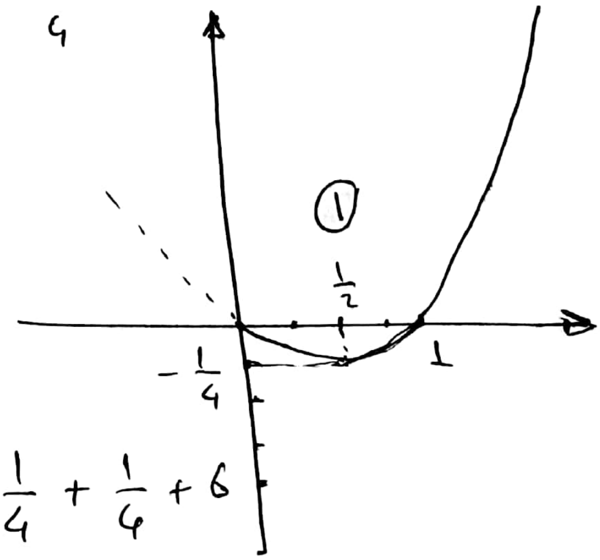
$f(x) = x^2 - x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

$f'(x) = 2x - 1$; 1 $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$			0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	6		

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$f(3) = 9 - 3 = 6$



$\overset{3}{\underset{0}{V}} f = |f(0) - f(\frac{1}{2})|$ 1

$+ |f(\frac{1}{2}) - f(3)|$ 1

$= |0 + \frac{1}{4}| + |-\frac{1}{4} - 6| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 6$

$= 6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ 2

٣/

$$\boxed{2.\ f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ x+2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}}$$

x^2 دالة متزايدة على $[0,1[$ وعدد الواحد 1

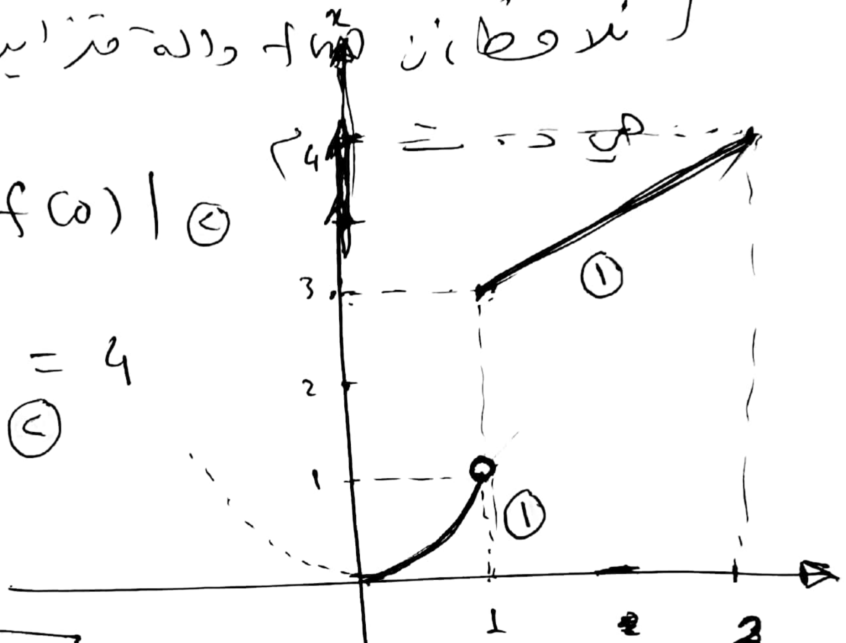
$x+2$ = = على $[1,2]$ وعدد الواحد 3 ٤

$1 \le 3$

نلاحظ أن $f(x)$ دالة متزايدة على $[0,2]$ وبالتالي

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = |f(2) - f(0)|$$

$$= |4 - 0| = 4$$



$$\boxed{3.\ f(x) = x - |x|} \ : x \in [-2,2]$$

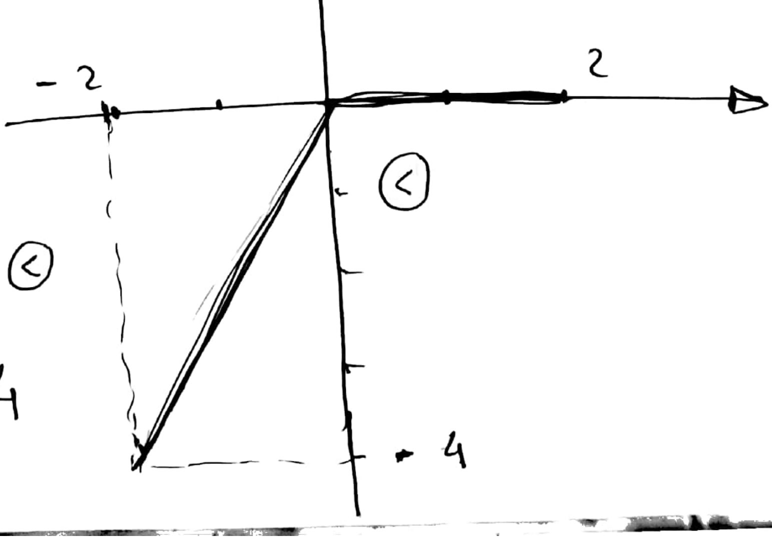
$$f(x) = x - \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 2 \ge x \ge 0 \\ 2x & -2 \le x \le 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $f(x)$ دالة متزايدة على المجال $[-2,2]$.

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} f = |f(2) - f(-2)|$$

$$= |0 - (-4)| = 4$$



Scanned by CamScanner

٤/

السؤال الثالث ؛

(1) $f(x) = x+1$

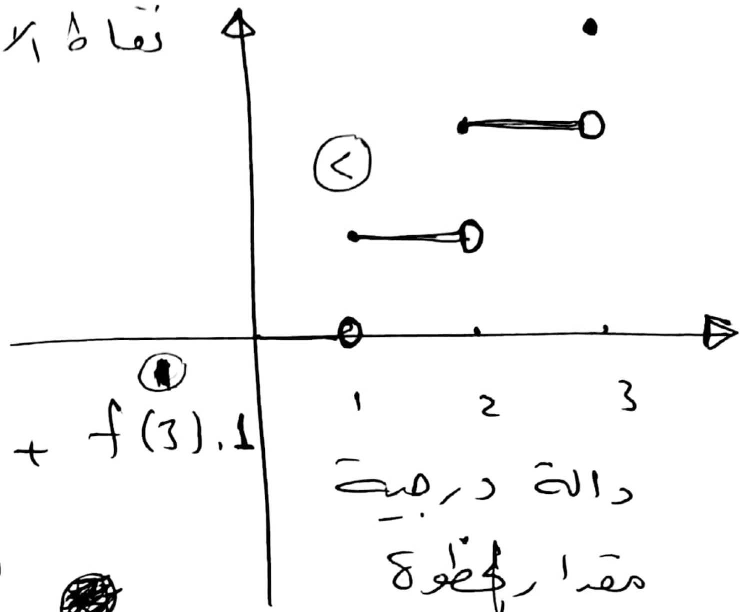
$g(x) = [x]$

نقاط الانفصال ؛ $\{1, 2, 3\}$

$$I = \int_0^3 (x+1)\, dg(x)$$

$$= f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1$$

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$



دالة درجية
مقدار القفزة
(القفزة) واحد

$$\int_0^3 f(x)\, dg(x) + \int_0^3 g(x)\, df(x) = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_0^3$$

$$\int_0^3 [x]\, d(x+1) = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_0^3 - 9$$

$$= \big[(4)\cdot(3) - 0\big] - 9 = 3$$

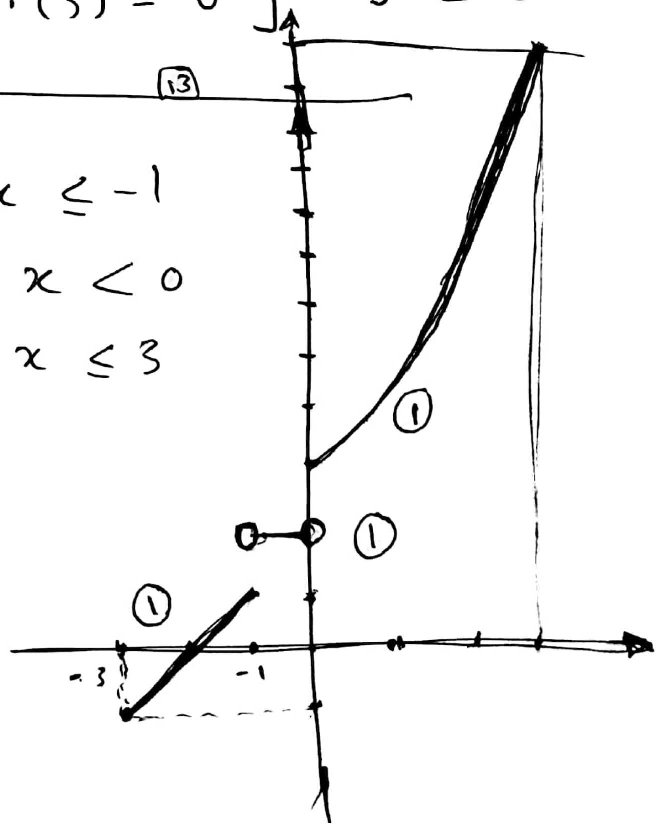
---

(2) $f(x) = x^2+1$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -3 \le x \le -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2+3 & 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

نقاط الانفصال ؛

$\{-1, 0\}$



$$I = \int_{-3}^{3} (x^2+1)\, dg(x) = \int_{-3}^{-1} (x^2+1)\cdot 1\, dx$$

$$+ \int_{-1}^{0} (x^2+1)(0)\, dx + \int_{0}^{3} (x^2+1)(2x)\, dx$$

$$+ f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right] + f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right]$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-3}^{-1} + 0 + \left[\frac{x^4}{2} + x^2\right]_0^3 + (2)[2-1]$$

$$+ (1)[3-2]$$

$$I = \left(-\frac{1}{3} - 1\right) - (-9-3) + \left(\frac{81}{2} + 9\right) + 3$$

$$= 23 - \frac{1}{3} + \frac{81}{2} = 23 + \frac{243-2}{6} = 23 - \frac{241}{6}$$

$$\frac{379}{6}$$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ 1 & 1 < x < 3 \\ 4 & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

دالة درجية

نقاط القفز $\{1, 3\}$

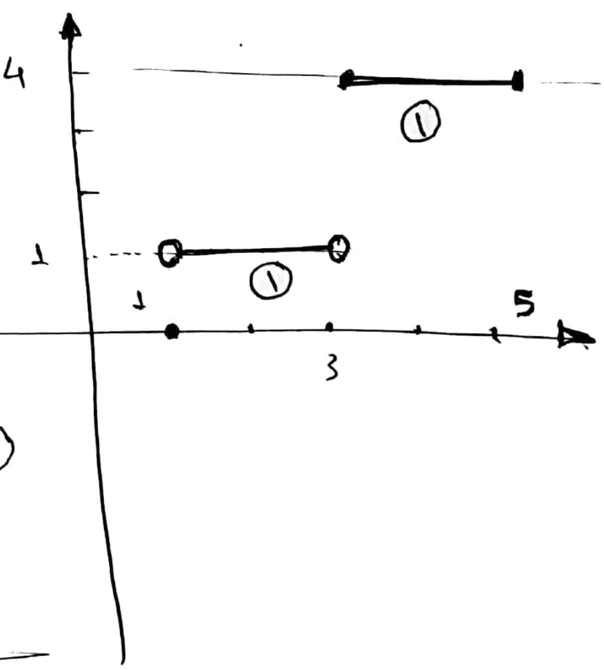
$$I = \int_1^5 f(x)\, dg(x)$$

$$= f(1)\left[g(1+0) - g(1)\right]$$

$$+ f(3)\left[g(3+0) - g(3-0)\right]$$

$$= 1[1-0] + 9[4-1]$$

$$= 1 + 27 = 28.$$



السؤال الرابع: 1) القياس: هو تابع μ يحقق

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

1) $\mu(\phi) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} : A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

2) تكامل لوبيغ لتابع بسيط f من فضاء قياس X بالنسبة للقياس μ يعطى بالشكل

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \mu(A_i)$$

حيث $\{c_i\}$ قيم لتابع f ، A_i تمثل تجزئة لـ X .

$$A_i = \{x \in X : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\}) \quad i = 1, n$$

3)

$$\int_{[0,3]} [x]\, d\mu = 0\, \mu[0,1[+ 1\, \mu[1,2[+ 2\, \mu[2,3[+ 3\, \mu(\{3\})$$

$$= 0(1) + 1(1) + 2(1) + 3(0) = 3$$

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

الجمهورية العربية السورية	**اختبار الفصل الثاني**	التاريخ: 1 /6/ 2014 م
وزارة التعليم العالي	**السنة الثالثة رياضيات**	الوقت : 4-2
جامعة دمشق –كلية العلوم	**المقرر: تحليل 5**	الاسم:

<u>السؤال الأول</u> (20 درجة): برهن صحة نظرية جوردان: الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني المعرف وسيطياً مجمعاً هو أن تكون كلاً من الدالتين x(t),y(t) دالة ذات تغير محدود على المجال $[\alpha,\beta]$.

<u>السؤال الثاني</u> (30 درجة): أثبت أن كلاً من الدوال الآتية ذات تغير محدود، ثم أوجد التغير الكلي لكل دالة، مع الرسم:

1. $f(x) = x - x^2 \quad : \quad x \in [0,1]$

2. $g(x) = x - |x| \quad : \quad x \in [-5,5]$

3. $h(x) = x - [x] \quad : \quad x \in [-2,2]$

<u>السؤال الثالث</u> (30 درجة): أحسب قيمة تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^3 x\, d[x] \xrightarrow{\text{ثم استنتج}} \int_0^3 [x]dx$

2. $\int_{-2}^{2} x^2\, dg(x) \; : \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & : -2 \le x \le -1 \\ 2 & : -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : 0 \le x \le 2 \end{cases}$

3. $\int_{-1}^{3} (x+1)\, dg(x) \; : \quad g(x) = \begin{cases} 0 & : x = -1 \\ 1 & : -1 < x < 2 \\ -1 & : 2 \le x \le 3 \end{cases}$

<u>السؤال الرابع</u> (20 درجة): عرّف القياس وعرّف تكامل لوبيغ للتابع البسيط على فضاء القياس (X,Ω,μ). ثم احسب التكامل (مستخدماً تعريف تكامل لوبيغ):

$$\int_{[0,3]} [x]d\mu$$

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

1

2014

سلم تصحيح تحليل /٥/

السؤال الأول: نظرية جوردان:

K منحني مجمع $\Longleftarrow$ $x(t)$ و $y(t)$ د. ت. م

K منحني مجمع أي أن $l = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(P) < \infty$ ①

حيث $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = \beta\}$

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$ ①

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < l$$

ولكن ① $|a_k| = \sqrt{a_k^2} \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

أي أن $\sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ①

أي أن $V(x(t), P) = \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| < l$

أي أن التغير الكلي للدالة $x(t)$ ① $\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) \le l < \infty$

محدود أي وبالتالي $x(t)$ د. ت. م.

وبالطريقة ذاتها نجد أن $\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(f) \le l < \infty$

وبالتالي $y(t)$ د. ت. م. وهو م

$x(t)$, $y(t)$ د. ت. م $\Longleftarrow$ K منحني مجمع.

أي لنثبت أن $l < \infty$

نأخذ $l(P)$ حيث

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

حيث P تجزئة لـ $[\alpha, \beta]$.

$$\Rightarrow \ell(P) \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \le \sum_{k=1}^{n} \left[|a_k| + |b_k| \right]$$

$$\ell(P) \le \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})|$$

$$\ell(P) \le V(x(t), P) + V(y(t), P)$$

$$\ell(P) \le \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) + \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) = M < \infty$$

د.م.ت $x(t)$ د.م.ت $y(t)$

$$\ell = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} (\ell(P)) < \infty$$ وبالتالي

ل م . م

$f(x) = x - x^2$ السؤال الرابع :

1) نلاحظ أن كلاً من x^2 و x دوال متزايدة على $[0,1]$ وبالتالي f كتبت على شكل فرق دالتين متزايدتين على $[0,1]$ وهذا يعني أن f د.م.ت (نظرية) .

---

2) التغير الكلي لـ f على $[0,1]$.

$y = x - x^2$

$0 = x(1-x) \Rightarrow x = 0$, $x = 1$

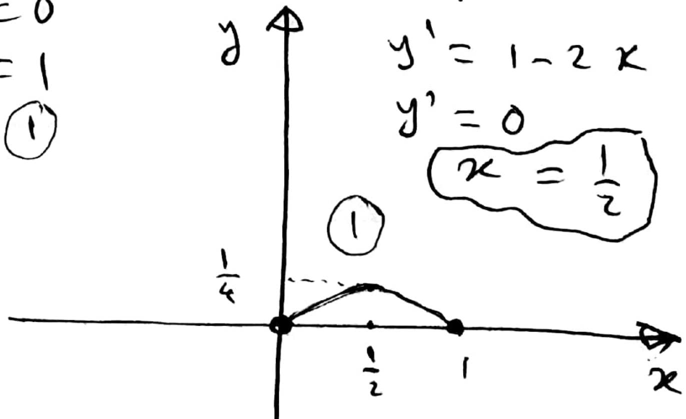
$y' = 1 - 2x$

$y' = 0$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y			0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0		



$$\bigvee_{0}^{1} f = \bigvee_{0}^{\frac{1}{2}} f + \bigvee_{\frac{1}{2}}^{1} f = |f(\tfrac{1}{2}) - f(0)| + |f(1) - f(\tfrac{1}{2})|$$

$$= |\tfrac{1}{4} - 0| + |0 - \tfrac{1}{4}| = \tfrac{1}{2} .$$

Scanned by CamScanner

٣

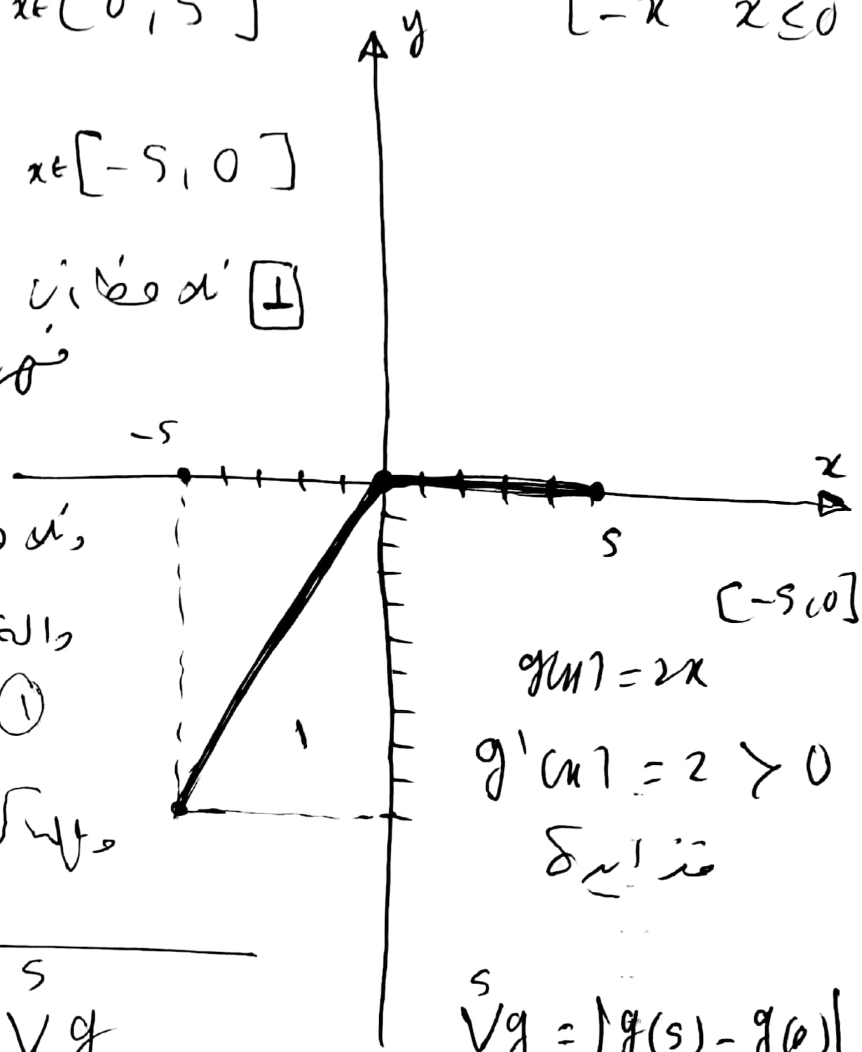
$g(x) = x - |x|$

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 5] \\ 2x & x \in [-5, 0] \end{cases}$ ②

I) نلاحظ أن $g(x)$ دالة ثابتة على $[0,5]$

فهي د. ت. م ①.



نلاحظ أن $2x = g(x)$

دالة متزايدة على $[-5,0]$

فهي د. ت. م ①.

$[-5,0]$

$g(x) = 2x$

$g'(x) = 2 > 0$

متزايدة

وبالتالي $g(x)$ د. ت. م على $[-5,5]$

$\overset{5}{\underset{-5}{V}} g(x) = \overset{0}{\underset{-5}{V}} g + \overset{5}{\underset{0}{V}} g$ ② ②

$\overset{5}{\underset{0}{V}} g = |g(5) - g(0)|$
$= |0 - 0| = 0$ ④

$= |g(0) - g(-5)| + 0 = |0 - (-10)| = 10$

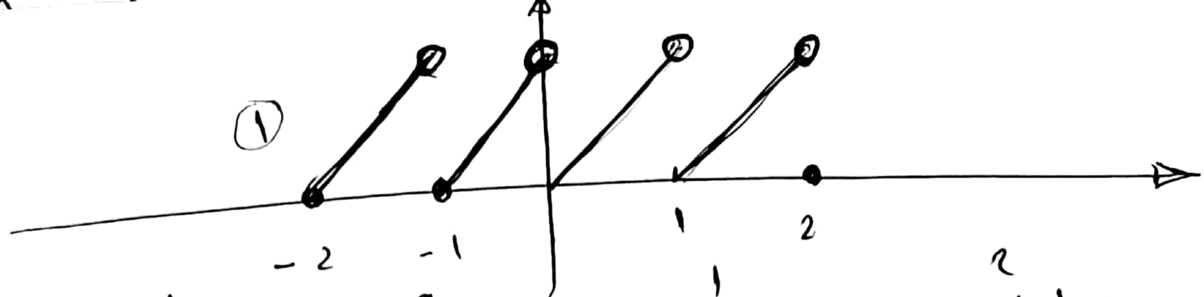
$h(x) = x - [x] \qquad x \in [-2, 2]$

$h(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x < -1 \\ x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & x = 2 \end{cases}$ ④ ①

نلاحظ أن كلاً من الدالتين $[x]$ و x دوال متزايدة على $[-2,2]$

وبالتالي $h(x)$ كتبت كفرق لدالتين متزايدتين وبالتالي هي د. ت. م على $[-2,2]$ نظرية.

٤



$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} h(x) = \overset{-1}{\underset{-2}{V}} h(x) + \overset{0}{\underset{-1}{V}} h(x) + \overset{1}{\underset{0}{V}} h(x) + \overset{2}{\underset{1}{V}} h(x)$$

نلاحظ أن هذه التغيرات الكلية في كل مجال جزئي فيها متساوية

ولذلك يمكن أن نأخذ أحدها ثم نضرب بـ 4 .

لحساب $\overset{-1}{\underset{-2}{V}} h(x)$ نأخذ تجزئة متساوية نونية منتظمة $[-2,-1]$

$$P = \{-2 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = -1\}$$

$h(x) = x+2$

$$\Delta x = \frac{-1-(-2)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2 + \frac{1}{n} \\ x_2 &= -2 + \frac{2}{n} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= -2 + \frac{n-1}{n} \\ x_n &= -2+1 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\begin{aligned} h(-2) &= -2+2 = 0 \\ h(x_1) &= \cancel{-2} + \frac{1}{n} + \cancel{2} \\ h(x_2) &= \cancel{-2} + \frac{2}{n} + \cancel{2} \\ &\vdots \\ h(x_{n-1}) &= \cancel{-2} + \frac{n-1}{n} + \cancel{2} \\ h(x_n) &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$V(h(x), P) = |h(x_1) - h(x_0)| + \cdots + |h(x_n) - h(x_{n-1})|$$

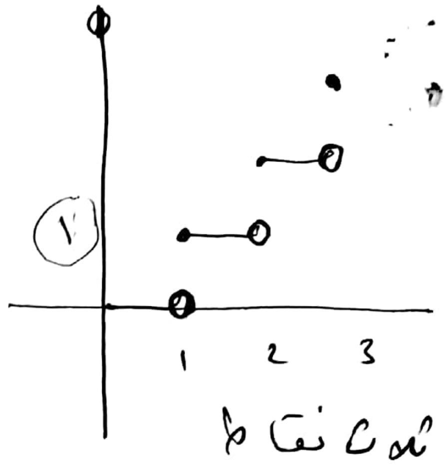
$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ مرة}} + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n}$$

$$\overset{-1}{\underset{-2}{V}} h(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-2}{n}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\overset{2}{\underset{-2}{V}} h(x) = 4(2) = 8$$

تم .

0/ 1 $\int_0^3 x\, d[x] =$



٧

لها نقاط
انقطاع .

$f(x) = x$
$g(x) = [x]$ $\Big\}$ $I = \int_0^3 x\, d[x]$

$I = f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\cdot g_3$

$g_1 = g_2 = g_3 = 1$ مقدار القفزة ٥

$I = 1 + 2 + 3 = 6.$

$\int_0^3 [x]\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_0^3 - 6$ ٤

$= \big[f(3)\cdot[3] - 0\big] - 6 = 9 - 6 = 3$

---

2 $\int_{-2}^{2} x^2\, dg(x) = \int_{-2}^{-1} x^2 (1)\,dx + \int_{-1}^{0} x^2 (0)\,dx$

$+ \int_0^2 x^2 (2x)\,dx + f(-1)\big[g(-1+0) - g(-1-0)\big]$

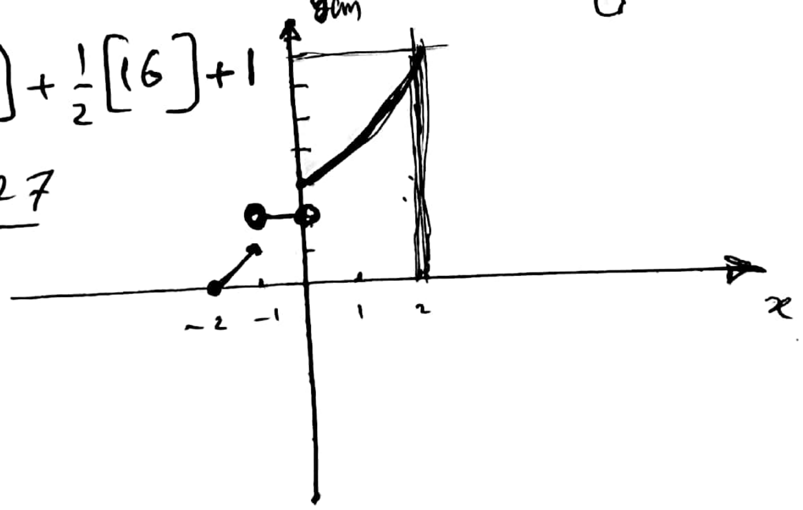
0

$+ f(0)\big[g(0+0) - g(0-0)\big]$

$= \frac{1}{3}\big[x^3\big]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\big[x^4\big]_0^2 + (1)\big[2-1\big] + 0$

0

$= \frac{1}{3}\big[-1-(-8)\big] + \frac{1}{2}\big[16\big] + 1$



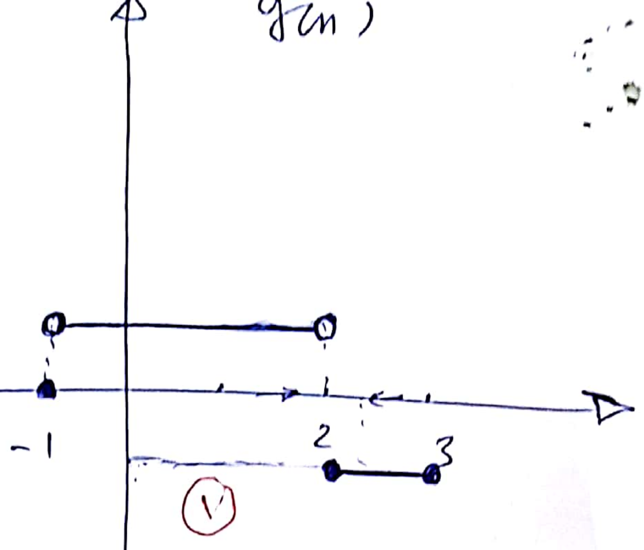
$= \frac{7}{3} + 9 = \frac{7+27}{3}$

$= \frac{34}{3}.$

Scanned by CamScanner

7

$f(x) = x+1$



$$I = \int_{-1}^{3} (x+1)\, d g(x)$$

$$= f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right]$$

$$+ f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right]$$

نقاط انفصال $\{-1, 2\}$

$$I = 0\,[1-0] + 3\,[-1-(1)] = -6$$

السؤال الرابع ١) عرّف القياس : هو تطبيق μ يحقق ما يلي

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

① $\mu(\emptyset) = 0$

② $\forall A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$: $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

---

② تكامل لوبيغ لدالة بسيطة f على فضاء قياس X

بالنسبة للقياس μ يعطى بـ

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \mu(A_i)$$

حيث $\{c_i\}$ قيم الدالة f . A_i تجزئة لـ X

$A_i = \{x \in X : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$ $i = 1, n$

$$\int_{[0,3]} [x]\, d\mu = 0\,\mu([0,1[) + 1\,\mu([1,2[) + 2\,\mu([2,3[)$$

$$+ 3\,\mu([3,3])$$

$$= 0 + 1.1 + 2.1 + 0 = 3 .$$

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي – جامعة دمشق
كلية العلوم – قسم الرياضيات

اختبار الفصل الأول
السنة الثالثة رياضيات
المقرر: تحليل 5

التاريخ: الأحد 2017/1/22م
الوقت : 2-4
الاسم:

السؤال الأول (20 درجة): برهن صحة نظرية جوردان:

الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني المعرف وسيطياً مجمعاً هو أن تكون كلاً من الدالتين x(t),y(t) دالة ذات تغير محدود على المجال $[\alpha,\beta]$.

السؤال الثاني (40 درجة): أوجد التغير الكلي لكل من الدوال الآتية مع الرسم:

1. $f(x)=x^2-4x : x\in[0,6]$

2. $g(x)=|x-5| : x\in[0,10]$

3. $h(x)=\sin x : x\in[0,\pi]$

4. $\varphi(x)=\begin{cases} x & 0\le x<2 \\ 6 & x=2 \\ x+3 & 2<x\le 6\end{cases}$

السؤال الثالث (30 درجة): أحسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^3 (x^2+2)dg(x):\quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)d(x^2+2):\quad g(x)=[x]$

2. $\int_0^6 (x+6)dg(x):\quad g(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x\le 2 \\ 4 & 2<x<4 \\ x+3 & 4\le x\le 6\end{cases}$

3. $\int_0^6 (x+3)dg(x):\quad g(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x\le 2 \\ 4 & 2<x<4 \\ 8 & 4\le x\le 6\end{cases}$

السؤال الرابع (10 درجة): أحسب تكامل لوبيغ للدالة $g(x)$ مع رسم $g(x)$:

$g(x)=3[x]+1 : x\in[0,4] \qquad , \quad \int_{[0,4]} g(x)d\mu$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طالب ٢٠١٧ ش

الامتحانات

1

سلم تصحيح تحليل (٥)

السؤال الأول   نظرية جوردان .

k منحني مجمّع $\Longleftarrow$ $x(t)\,,\,y(t)$ د.ت.م

k منحني مجمّع أي

$$l=\sup_{P\in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(P) < \infty$$

حيث $P=\{\alpha=t_0<t_1<t_2\cdots<t_n=\beta\}$

$$l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2+[y(t_k)-y(t_{k-1})]^2}$$

$$l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}<l$$

ولكن

$$|a_k|=\sqrt{a_k^2}\le\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$$V(x(t),P)=\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|<l$$

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}\,x(t)\le l<\infty \Rightarrow$$ $x(t)$ د.ت.م

وكذلك بالطريقة ذاتها نثبت (برهن)

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}\,y(t)\le l<\infty$$ $\Rightarrow y(t)$ د.ت.م .

و.هـ.م

$x(t)$ ، $y(t)$ د.ن.م ⇐ k فتش تجمع

نريد اثبات ان $l<\infty$

نأخذ $l(P)$ لجميع

$$l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$$

لجميع P تجزئة لـ $[\alpha,\beta]$

$$l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\left[|a_k|+|b_k|\right]$$

$$l(P)\leq\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

$$l(P)\leq V(x(t),P)+V(y(t),P)$$

$$l(P)\leq\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}x(t)+\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}y(t)<\infty$$

$$l=\sup_{P\in\mathcal{P}[\alpha,\beta]} l(P)$$

م.ه.و

٣

السؤال
الثالث

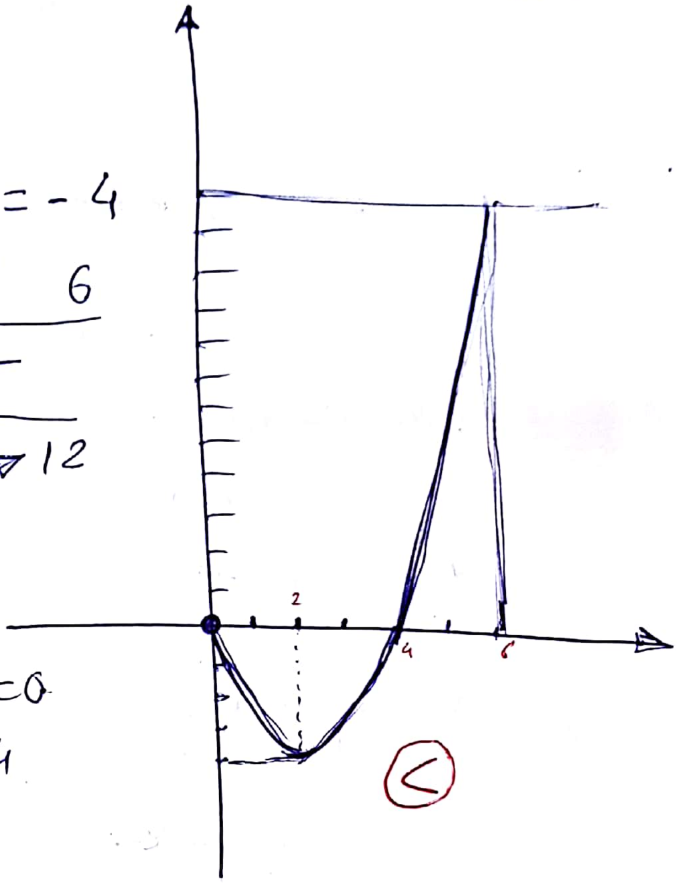
1. $f(x) = x^2 - 4x \quad ; \; x \in [0, 6]$

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 - 8 = -4$

x	0		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	12



$\begin{array}{r} 36 \\ 24 \\ \hline 12 \end{array}$

$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$

$x = 0, x = 4$

$\overset{6}{\underset{0}{V}} f = \overset{2}{\underset{0}{V}} f + \overset{6}{\underset{2}{V}} f$

$\overset{6}{\underset{0}{V}} f = |f(2) - f(0)| + |f(6) - f(2)|$

$\overset{6}{\underset{0}{V}} f = |-4 - 0| + |12 - (-4)| = 4 + 16 = 20$

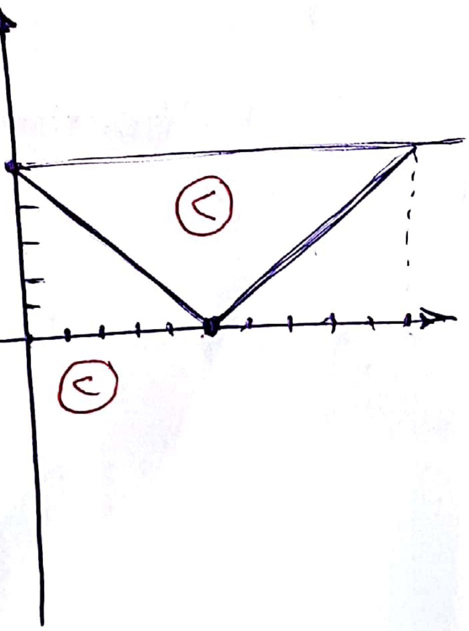
2. $g(x) = |x - 5| \; ; \; x \in [0, 10]$

$g(x) = \begin{cases} x - 5 & x \geq 5 \\ -x + 5 & x \leq 5 \end{cases}$

$\overset{10}{\underset{0}{V}} f = \overset{5}{\underset{0}{V}} f + \overset{10}{\underset{5}{V}} f$

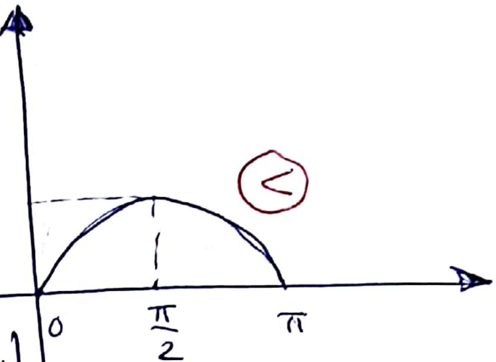
$= |f(5) - f(0)| + |f(10) - f(5)|$

$= |0 - 5| + |5 - 0| = 10$



3. $h(x) = \sin x \; ; \; x \in [0, \pi]$

$$\overset{\pi}{\underset{0}{V}} h = \overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{V}} h + \overset{\pi}{\underset{\frac{\pi}{2}}{V}} h$$



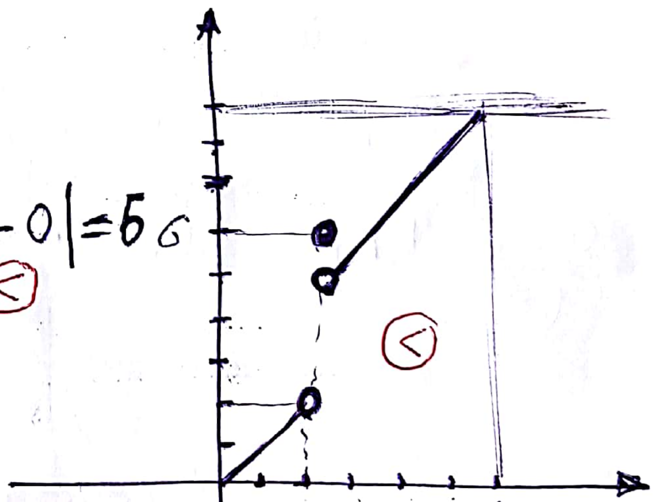
$$\overset{\pi}{\underset{0}{V}} h = \left|h\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - h(0)\right| + \left|h(\pi) - h\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$= |1-0| + |0-1| = 2$$

---

4. $\varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ x+3 & 2 < x \le 6 \end{cases}$

$$\overset{6}{\underset{0}{V}} f = \overset{2}{\underset{0}{V}} f + \overset{6}{\underset{2}{V}} f$$



$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = |f(2) - f(0)| = |6-0| = \cancel{5}\,6$$

$[2,6]$

$$\overset{6}{\underset{2}{V}} f = \sup_{P \in \mathcal{P}[2,6]} \left(V(f,P) \right)$$

$P = \{x_0 = 2 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = 6\}$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_3) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1 + 3 - 6| + |x_2 + \cancel{3} - x_1 - \cancel{3}| + |x_3 + 3 - x_2 - 3| + \cdots + |x_n + \cancel{3} - x_{n-1} - \cancel{3}|$$

$$= 3 - x_1 + \cancel{x_2} - x_1 + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} \cdots + x_n - \cancel{x_{n-1}}$$

$$= 9 - 2x_1 \Rightarrow \overset{6}{\underset{2}{V}} f = 5 \Rightarrow \overset{6}{\underset{0}{V}} f = 6 + 5 = 11$$

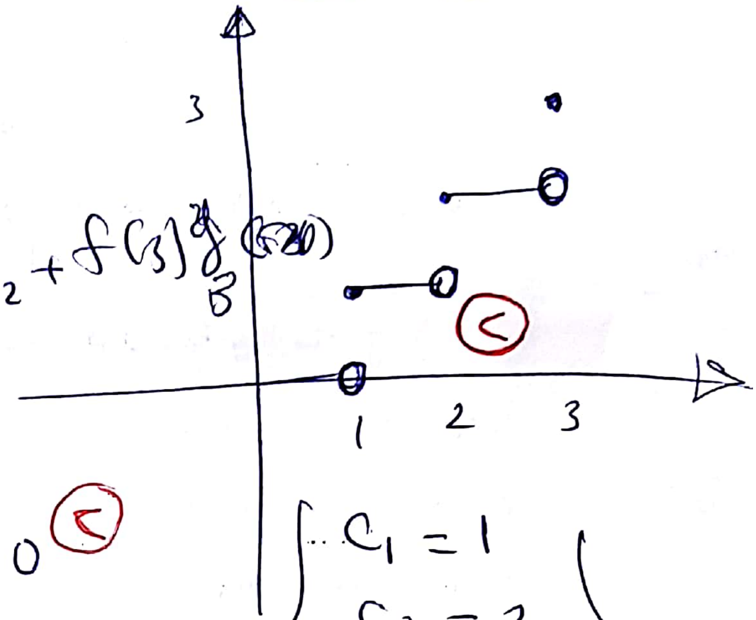
0 /

1.

السؤال الثاني

$$I=\int_0^3 (x^2+2)\,dg(x) \quad , \quad g(x)=[x]$$

$$f(x)=x^2+2$$



$$I = f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\, g_3 \; (=20)$$

$$g_1=g_2=g_3=1$$

$$I = 3+6+11 = 20$$

$$c_1=1,\quad c_2=2,\quad c_3=3$$

$$\int_0^3 g(x)\,d(x^2+2) = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_0^3 - 20$$

$$= [(11)(3)-0] - 20 = 13$$

2.

$$f(x)=x+6$$

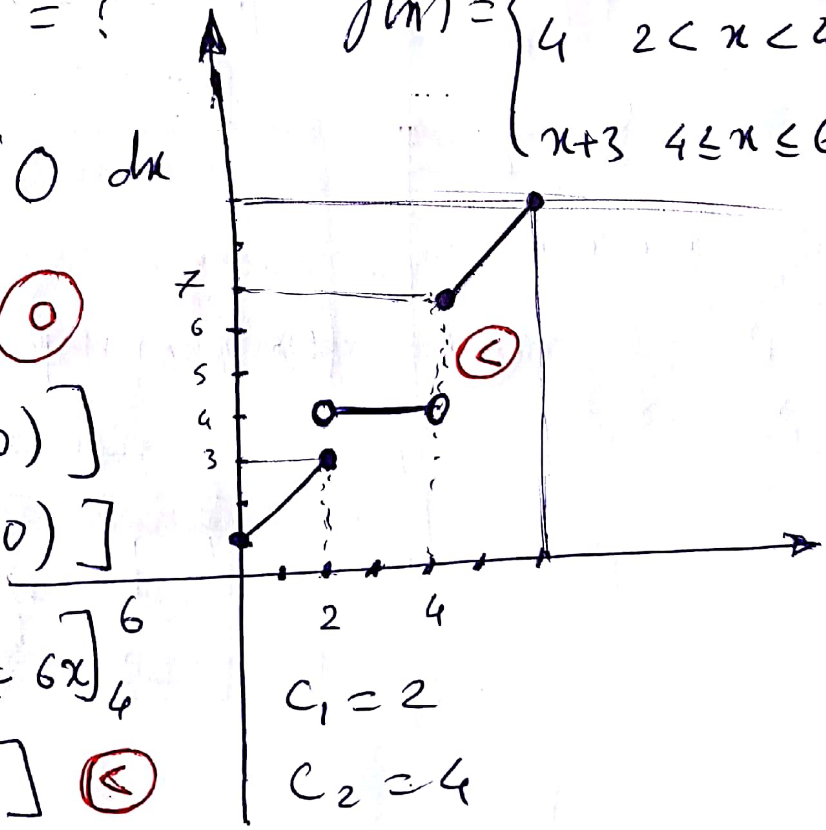
$$I=\int_0^6 (x+6)\,dg(x) = ?$$

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x\le 2 \\ 4 & 2<x<4 \\ x+3 & 4\le x\le 6 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 (x+6)(1)\,dx+\int_2^4 0\,dx + \int_4^6 (x+6)(1)\,dx +$$

$$f(2)\left[g(2+0)-g(2-0)\right] + f(4)\left[g(4+0)-g(4-0)\right]$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}+6x\right]_4^6 + 8[4-3] + 10[7-4]$$



$$c_1=2$$

$$c_2=4$$

7/ $I = [14] + [\cancel{18} + \cancel{36} - \cancel{8} - \cancel{24}] + 8 + 30$
$10 + 12$
$= 74$ 1

---

3. $f(x) = x+3$

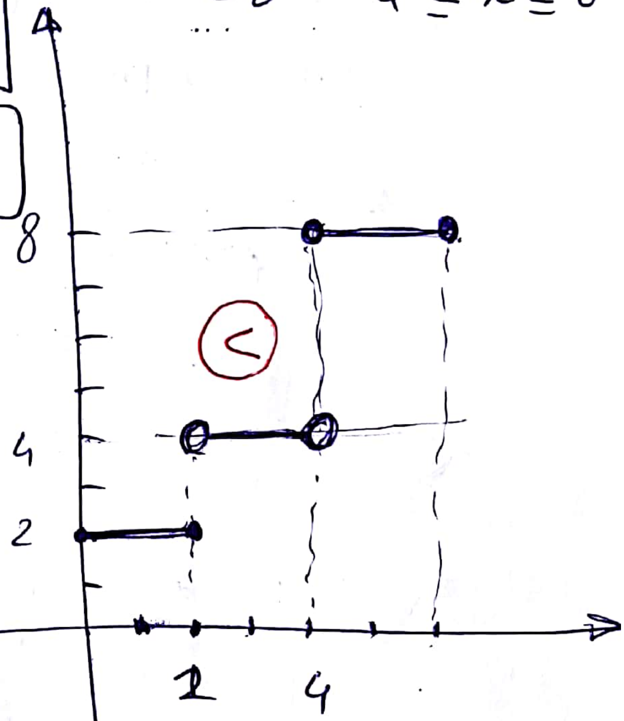
$$I = \int_0^6 (x+3)\, dg(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 2 \\ 4 & 2 < x < 4 \\ 8 & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

$$I = f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right] + f(4)\left[g(4+0) - g(4-0)\right]$$

$$= 5[4-2] + 7[8-4]$$

$$= 10 + 28 = 38$$



$C_1 = 2$

$C_2 = 4$

السؤال 2

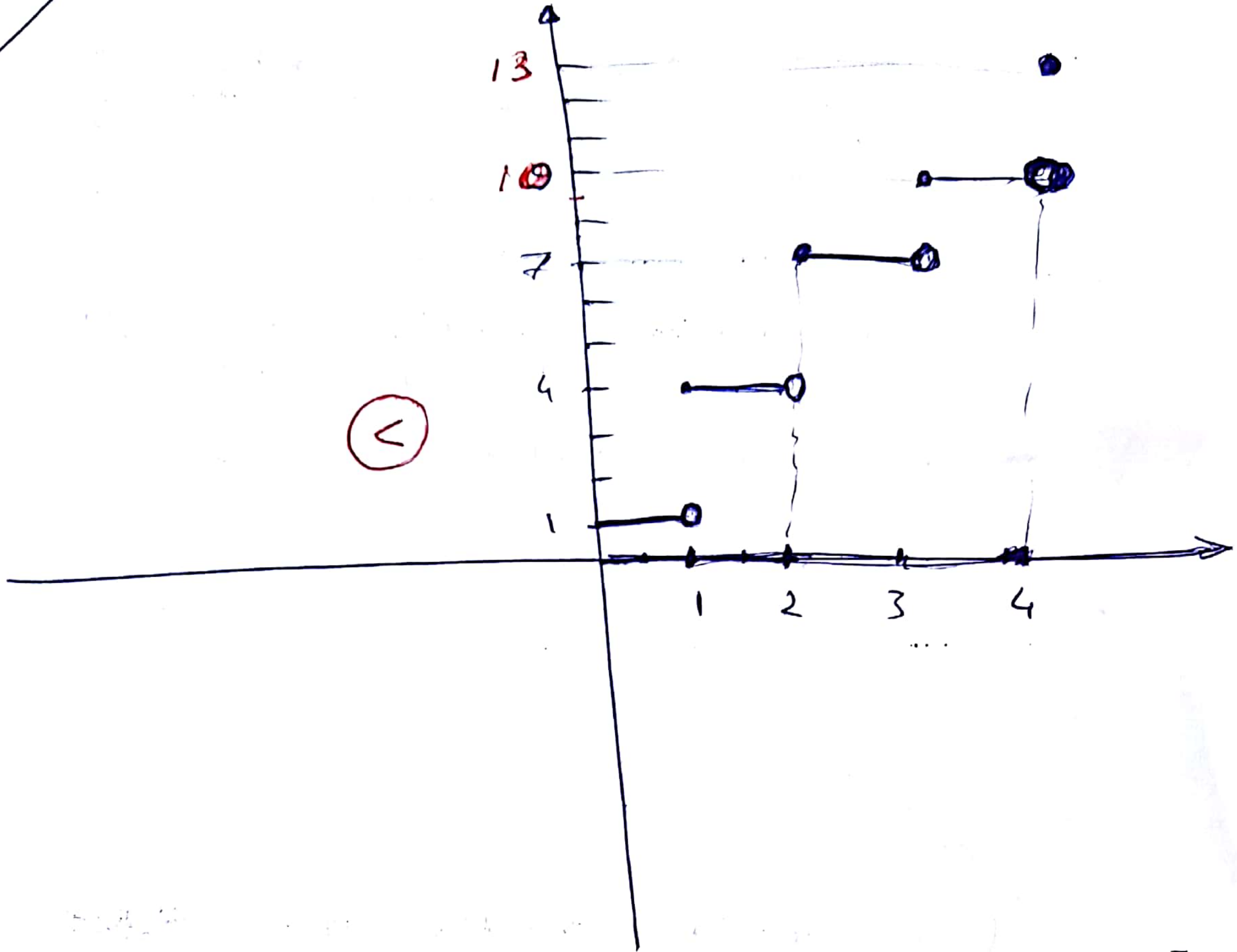
$$g(x) = 3[x] + 1$$

$$= 3\begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ 3 & 3 \le x < 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases} + 1$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 4 & 1 \le x < 2 \\ 7 & 2 \le x < 3 \\ 10 & 3 \le x < 4 \\ 13 & x = 4 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

√



<

$$\int_{[0,4]} g(x)\, d\mu = 1\cdot\mu[0,1[+ 4\,\mu[1,2[+ 7\,\mu[2,3[+ 10\,\mu[3,4[+ 13\,\cancel{\mu[4,4]} = 22$$

0

1

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي- جامعة دمشق
كلية العلوم- قسم الرياضيات

اختبار الفصل الأول
السنة الثالثة:رياضيات
المادة: تحليل 5

التاريخ: الاثنين2018/1/22
الوقت: 2-4
الاسم:

السؤال الأول(30 درجة): جد التغير الكلي لكل من الدوال الآتية مع الرسم:

$$f(x)=x^2-x:\quad x\in[0,2] \quad , \quad g(x)=x-2|x-1|:\quad x\in[0,2] \quad , \quad \varphi(x)=\begin{cases} x-1 & 0\le x<1 \\ 6 & x=1 \\ x^2 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

السؤال الثاني(30 درجة): احسب تكامل استيلجس لكل من الدوال الآتية مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^3 (x^2+1)dg(x):\quad g(x)=[x];$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^3 g(x)d(x^2+1):\quad g(x)=[x]$

2. $\int_0^6 (x^2+1)dg(x):\quad g(x)=\begin{cases} x+2 & 0\le x\le 2 \\ x & 2<x<4 \\ x+3 & 4\le x\le 6 \end{cases}$

3. $\int_0^6 (x^2+1)dg(x):\quad g(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x\le 2 \\ 6 & 2<x<4 \\ 4 & 4\le x\le 6 \end{cases}$

السؤال الثالث(20 درجة): إذا كانت f و g دالتين معرفتين على [0,1] كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 1 & x\in Q \\ -1 & x\notin Q \end{cases}$$

والمطلوب:

1. أثبت أن f محدودة، ولكنها ليست ذات تغير محدود.
2. أثبت أن |g| دالة ذات تغير محدود، بينما g ليست ذات تغير محدود.

السؤال الرابع(20 درجة): عرف تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على فضاء القياس (X,A,μ) والمطلوب:

1. احسب $\int_{[0,4]} f(x)d\mu$ علماً أن $f(x)=2[x]+2:\quad x\in[0,4]$.
2. إذا كانت $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{\{a,b\},\{d\}\}$ أوجد أصغر حلقة وأصغر جبر على X يحوي τ .

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق