نظري

◄ دكتور المادة: غصون الجيرودي

◄ المحاضرة: السابعة عنوان المحاضرة: العلاقات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في المحاضرة السابعة من مقررنا الرياضيات المتقطعة والتي سنتناول فيها مراجعة لصفات العلاقة ونتعرف على تركيب العلاقات وعلاقة الترتيب .ولنبدأ معا.......

صفات العلاقة: لتكن المجموعة A المعرف عليها العلاقة R بيانها G عندئذ تكون العلاقة :

1- **انعكاسية** $\Delta_A \subseteq G \Leftrightarrow \forall x, y \in A: xRx$.
2- **تناظرية** $G = G^{-1} \Leftrightarrow \forall x, y \in A: xRy \Longrightarrow yRx$.
3- **تخالفية** $G \cap G^{-1} \subseteq \Delta_A \Leftrightarrow \forall x, y \in A: x \neq y\ xRy \Longrightarrow y\cancel{R}x$.
4- **متعدية** $GoG = G \Leftrightarrow \forall x, y, z \in A: xRy, yRz \Longrightarrow xRz$.

ملاحظة: تكون العلاقة R دالة إذا كان لكل عنصر x من المنطلق صورة واحدة y في المستقر

أي إذا كان:

$$\forall x \in \underbrace{A}_{\text{المنطلق}} : \exists!\, y \in \underbrace{A}_{\text{المستقر}} ; xRy$$

تكون العلاقة R تقابل إذا كان كل عنصر من المستقر صورة لعنصر واحد من المنطلق أي :

$$\forall z \in \underbrace{A}_{\text{المستقر}} : \exists!\, c \in \underbrace{A}_{\text{المنطلق}} ; cRz$$

تعريف تركيب العلاقات: لتكن R_1, R_2 علاقتين معرفتين على مجموعة غير خالية A نعرف $R_2 o R_1$ بيانها $G_2 o G_1$ كما يلي :

$$(a, c) \in G_2 o G_1 \Leftrightarrow \exists b \in A: (a, b) \in G_1, (b, c) \in G_2$$

$$a(R_2 o R_1)c \Leftrightarrow \exists b \in A: aR_1 b, bR_2 c$$

مثال: لتكن المجموعة $A = \{a, b, c\}$ لنعرف عليها العلاقتين R_1, R_2 بحيث بيان كل منهما :

$$G_1=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,c)\}$$

$$G_2=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b)\}$$

أوجد G_1oG_2 و G_2oG_1

الحل:بالبداية **لنوجد** G_2oG_1 **:**

حسب التعريف :

$$(a,a)\in G_2oG_1 \Leftrightarrow (a,a)\in G_1,(a,a)\in G_2$$

$$(a,b)\in G_2oG_1 \Leftrightarrow (a,b)\in G_1,(b,b)\in G_2$$

$$(a,c)\in G_2oG_1 \Leftrightarrow (a,b)\in G_1,(b,c)\in G_2$$

$$(b,a)\in G_2oG_1 \Leftrightarrow (b,a)\in G_1,(a,a)\in G_2$$

$$(b,b)\in G_2oG_1 \Leftrightarrow (b,c)\in G_1,(c,b)\in G_2$$

$$(c,b)\in G_2oG_1 \Leftrightarrow (c,c)\in G_1,(c,b)\in G_2$$

ومنه: $G_2oG_1=\{(a,a),(a,b),(b,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$

ثانيا :نوجدG_1oG_2

$$a\xrightarrow{G_2}a\xrightarrow{G_1}a\Longrightarrow(a,a)$$

$$b\Longrightarrow(a,b)$$

$$b\xrightarrow{G_2}b\xrightarrow{G_1}a\Longrightarrow(b,a)$$

$$c\Longrightarrow(b,c)$$

$$c\xrightarrow{G_1}c\Longrightarrow(b,c)$$

- نأخذ الثنائية من G_2 فيكون العنصر الأول منها مرتبع بالعنصر الثاني وفق R_2 ننظر لهذا العنصر الثاني و نرى مع أي من العناصر مرتبط وفق R_1 و فيتشكل نتيجة ذلك ثنائيات مساقطها الأولى هي مساقط الأولى لـعناصر G_2 و مساقطها الثانية هي مساقط ثانية لـعناصر G_1
- مثلا أخذنا العنصر a ووجدناه يرتبط مع العنصر aوفق البيان G_2 ثم إن العنصر a يرتبط مع العنصر a وفق البيان G_1 وبالنهاية أخذنا الثنائية (a,a) حيث المسقط الأول هو أول عنصر والمسقط الثاني هو العنصر الأخير

$$c\xrightarrow{G_2}b\xrightarrow{G_1}a\Longrightarrow(c,b)$$

$$c\Longrightarrow(c,c)$$

وبالتالي :

$$G_1 o G_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)\}$$

ملاحظة:

إذا كان بيان العلاقة G يساوي Δ_A (يساوي قطرها)فإن العلاقة تحقق جميع صفات العلاقة

نتائج :

1-**إذا كانت R انعكاسية $\Leftarrow$ R^{-1} انعكاسية :**

الإثبات:

R انعكاسية فإن$\forall x \in A: xRx$

العلاقة المعاكسة R^{-1}: $\forall x \in A: xR^{-1}x$ $\Leftarrow$ R^{-1} انعكاسية

2- **R تناظرية R^{-1} $\Leftarrow$ تناظرية :**

الإثبات :

بفرض Rتناظرية فإن:

$$\forall x,y \in A: xRy \Longrightarrow yRx$$

وبالتالي العلاقة المعاكسة R^{-1} :

$$\forall x,y \in A: yR^{-1}x \Longrightarrow xR^{-1}y$$

وبالتالي العلاقة R^{-1} علاقة تناظرية .

3- **العلاقة R تخالفية $\Leftarrow$ R^{-1} تخالفية :**

الإثبات :

بفرض R تخالفية فإن :

$$\forall x,y \in A: x \neq y \ \ , xRy \Longrightarrow y\not{R}x$$

العلاقة المعاكسة :

$$\forall x, y \in A : \ x \neq y \ , \qquad yR^{-1}x \Longrightarrow x\not{R}^{-1}y$$

أي أن R^{-1} تخالفية .

<u>ويمكننا الحل بطريقة ثانية :</u>

بفرض R تخالفية فإن :

$$\forall x, y \in A : xRy \, , yRx \Longrightarrow x = y$$

العلاقة المعاكسة R^{-1} :

$$\forall x, y \in A : yR^{-1}x, xR^{-1}y \Longrightarrow y = x$$

بالتالي العلاقة R^{-1} علاقة تخالفية .

4-العلاقة R متعدية $\Longleftarrow$ العلاقة R^{-1} متعدية .

الإثبات :

بفرض R متعدية فإن :

$$\forall x, y, z \in A : xRy, yRz \Longrightarrow xRz$$

$$\forall x, y, z \in A : yR^{-1}x, zR^{-1}y \Longrightarrow zR^{-1}x$$

ومنه العلاقة R^{-1} علاقة متعدية .

<u>علاقة الترتيب :</u>

لتكن R علاقة على مجموعة A نقول عن R أنها علاقة ترتيب على A إذا كانت R انعكاسية وتخالفية ومتعدية .

- وفي حال R <u>علاقة ترتيب</u> سنرمز لها بـ($\leq$) مثلاً ($xRy \Longrightarrow x \leq y$)

ونقول عن ($A, \leq$) مجموعة مرتبة (مزودة بعلاقة ترتيب)

- نقول عن العلاقة R أنها علاقة ترتيب كلي إذا كان كل عنصرين في A متقارنين وفق ($\leq$) أي

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow \begin{cases} \text{إما } x \leq y \\ \text{أو } y \leq x \end{cases}$$

مثال على علاقة ترتيب كلي :

: $(\mathbb{R}, \leq)$

العلاقة انعكاسية $\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: xRx$

العلاقة تخالفية $\Longrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}: xRy, yRx \Longrightarrow x = y$

العلاقة متعدية $\Longrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}: xRy, yRz \Longrightarrow xRz$

ومنه $(\boldsymbol{R}, \leq)$ **مجموعة مرتبة** .

إن $(\mathbb{R}, \leq)$ علاقة ترتيب كلي لأن: متقارنين $\forall x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x, y$

مثال على علاقة ترتيب جزئي:لتكن لدينا المجموعة :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & z \end{pmatrix}; a, b, c, z \in R \right\}$$

لنعرف على المجموعة العلاقة $(\sim)$ بالشكل :

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & z_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & z_2 \end{pmatrix} \in A$$

$x \sim y$ إذا كان كل عنصر في المصفوفة x أصغر أو يساوي العنصر المقابل له من المصفوفة y

أي إذا تحقق :

$$\begin{pmatrix} a_1 \leq a_2 & b_1 \leq b_2 \\ c_1 \leq c_2 & z_1 \leq z_2 \end{pmatrix}$$

1- **إن العلاقة** $(\sim)$ **انعكاسية** لأن:

$$\forall x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & z_1 \end{pmatrix} \in A: a_1 \leq a_1, b_1 \leq b_1, z_1 \leq z_1, c_1 \leq c_1 \Longrightarrow x \sim x$$

2-**العلاقة** $(\sim)$ **تخالفية** لأن :

$$\forall x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & z_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & z_2 \end{pmatrix} \in A$$

$$x\sim y , y\sim x \overset{\text{حسب تعريف}\sim}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} a_1 \le a_2 , a_2 \le a_1 \\ b_1 \le b_2 , b_2 \le b_1 \\ z_1 \le z_2 , z_2 \le z_1 \\ c_1 \le c_2 , c_2 \le c_1 \end{Bmatrix} \overset{\text{مجموعة مرتبة فهي تخالفية}(\mathbb{R},\le)}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ z_1 = z_2 \\ c_1 = c_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

3-إن **(~) متعدية :**

$$\forall x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & z_1 \end{pmatrix} , y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & z_2 \end{pmatrix} , z = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & z_3 \end{pmatrix} \in A$$

$$x\sim y , y\sim z \overset{\text{حسب تعريف}\sim}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} a_1 \le a_2 , a_2 \le a_3 \\ b_1 \le b_2 , b_2 \le b_3 \\ z_1 \le z_2 , z_2 \le z_3 \\ c_1 \le c_2 , c_2 \le c_3 \end{Bmatrix} \overset{\text{مجموعة مرتبة فالعلاقة متعدية }(\mathbb{R},\le)}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} a_1 \le a_3 \\ b_1 \le b_3 \\ z_1 \le z_3 \\ c_1 \le c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x\sim z$$

لكن (~) علاقة ترتيب جزئية لأن إذا أخذنا :

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} , y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

فنجد: $x \nsim y , y \nsim x$

<u>علاقة التكافؤ:</u>

لتكن R علاقة على مجموعة A نقول عن R أنها علاقة تكافؤ على A إذا كانت R انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

<u>انتهت المحاضرة</u>

إعداد:سماح علوان * سندس درويش *نذير تيناوي