◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: التاسعة عنوان المحاضرة: تمارين +بعض الخواص

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

سنبدأ معكم أصدقائي في هذه المحاضرة بحل بعض التمارين وسنتعرف على بعض خصائص المتغيرات العشوائية المستقلة .

تمرين :

نفرض أن (X) متغير عشوائي يدل على أعمار المصابيح الغازية المستخدمة في كلية العلوم ،ولنفرض أن له التوزيع الطبيعي بمتوسط (3500) ساعة وانحراف معياري (600) ساعة ،والمطلوب :

١- ماهي نسبة المصابيح التي يجب أن تبدل بعد (3350) ساعة .

٢- بعد كم ساعة يجب أن نغير (10%) من المصابيح .

٣- أوجد الاحتمال $P(3350 \leq X \leq 3560)$.

الحل

من الفرض لدينا (X) يتبع التوزيع الطبيعي $X \sim \left(\underbrace{3500}_{\mu}, \underbrace{600}_{\sigma^2}\right)$

١- "يجب أن تبدل" أي أن عمرها أقل من (3350) ساعة، أي :

$$P(X \leq 3350) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} \leq \frac{3350-3500}{600}\right)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 3350) = P(Z \leq -0.25)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 3350) = \phi_Z(-0.25)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 3350) = 1 - \phi_Z(0.25)$$

من الجدول نوجد قيمة $\phi_Z(0.25)$

$$\Rightarrow P(X \leq 3350) = 1 - 0.5987 = 0.4013$$

أي أن نسبة المصابيح التي يجب أن تبدل بعد (3350) تقريبا (40%) .

٢- نفرض أن بعد (x) ساعة نغير (10%) من المصابيح وبالتالي :

$$P(X \leq x) = 0.10$$

بالمعايرة نجد :

$$P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} \le \frac{x-3500}{600}\right) = 0.10$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{x-3500}{600}\right) = 0.10$$

$$\Rightarrow \phi_Z\left(\frac{x-3500}{600}\right) = \underbrace{0.10}_{\phi(-\mathfrak{z})}$$

$$\Rightarrow \phi_Z\left(\frac{x-3500}{600}\right) = 1-0.90$$

عوضنا بدل (0.10)
$(1-0.90)$
لأنه لا يوجد بالجدول القيمة
(0.10)

نأخذ متوسط القيمتين : $\phi(1.28) = 0.8997$ وَ $\phi(1.29) = 0.9015$

ومنه لنأخذ القيمة $\phi(1.285)$

$$\Rightarrow \phi_Z\left(\frac{x-3500}{600}\right) = 1-\phi(1.285)$$

$$\Rightarrow \phi_Z\left(\frac{x-3500}{600}\right) = \phi(-\mathfrak{z}) = \phi(1.285)$$

$$\Rightarrow \frac{x-3500}{600} = -1.285$$

$$\Rightarrow x = 2739 \quad \text{ساعة}$$

أي بعد (2739) ساعة نغير (10%) من المصابيح .

-٣

$$P(3350 \le X \le 3560) \underset{\text{بالمعايرة}}{=} P\left(\frac{X-3350}{600} \le \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} \le \frac{X-3560}{600}\right)$$

$$\Rightarrow P(3350 \le X \le 3560) = P(-0.25 \le Z \le 0.10)$$

$$\Rightarrow P(3350 \le X \le 3560) = \phi(0.10) - \phi(-0.25)$$

$$\Rightarrow P(3350 \le X \le 3560) = \phi(0.10) - \phi\big(1-\phi(0.25)\big)$$

$$\Rightarrow P(3350 \le X \le 3560) = \phi(0.10) + \phi(0.25) - 1$$

$$\Rightarrow P(3350 \le X \le 3560) = 0.5395 + 0.5987 - 1 = 0.1385$$

احتمال أن يكون المصباح بين (3350) و (3360) هو (14%) تقريبا .

تمرين :

تقدم لامتحان مقرر الإحصاء (750) طالبا وبعد إعلان النتائج تبين أن درجاتهم التي نالوها تتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(60,100)$ ، فإذا تم تقسيم الطلاب إلى ثلاث فئات بحيث تحوي الفئة (A) الطلاب الذين نالوا درجات تزيد على (70) وتحوي الفئة (B) الطلاب الذين نالوا درجات ما بين (50و70) وتحوي الفئة (C) الطلاب الذين نالوا درجات أقل من (50) والمطلوب :

١- تعيين عدد الطلاب في كل فئة .

٢- ماهي أقل علامة نالها طالب من العشرة الأوائل .

الحل

بفرض أن (X) متغير عشوائي يدل على درجة الطالب في مقرر الإحصاء فيكون لدينا من الفرض

$$X\sim N\left(\underbrace{60}_{\mu},\underbrace{100}_{\sigma}\right)$$

١- نسبة الطلاب في الفئة الأولى (تزيد درجاتهم على سبعين)

$$P(X>70)=1-P(X\leq 70)$$

$$\Rightarrow P(X>70)\underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}}1-P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)}\leq\frac{70-60}{10}\right)$$

$$\Rightarrow P(X>70)=1-P(Z\leq 1)$$

$$\Rightarrow P(X>70)=1-\phi\left(\underbrace{1}_{-\text{ج}}\right)$$

$$\Rightarrow P(X>70)=1-0.8413=0.1587$$

فيكون عدد الطلاب في الفئة الأولى (A) هو :

$$750\times 0.1587=119\ \text{طالب}$$

نسبة الطلاب في الفئة الثانية :

$$P(50\leq X\leq 70)\underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}}P\left(\frac{50-60}{10}\leq\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)}\leq\frac{70-60}{10}\right)$$

$$\Rightarrow P(50\leq X\leq 70)=P(-1\leq Z\leq 1)$$

$$\Rightarrow P(50\leq X\leq 70)=\phi_Z(1)-\phi_Z(-1)$$

$$\Longrightarrow P(50 \le X \le 70) = \phi_Z(1) - \left(1 - \phi_Z(1)\right)$$
$$\Longrightarrow P(50 \le X \le 70) = 2\phi_Z(1) - 1$$
$$\Longrightarrow P(50 \le X \le 70) = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

فيكون عدد الطلاب في الفئة الثانية (B) هو :

$$750 \times 0.6826 = 512 \text{ طالب}$$

نسبة الطلاب في الفئة الثالثة :

$$P(X < 50) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} < \frac{50-60}{10}\right)$$
$$\Longrightarrow P(X < 50) = P(Z < -1)$$
$$\Longrightarrow P(X < 50) = \phi_Z(-1) = 1 - \phi_Z(1)$$
$$\Longrightarrow P(X < 50) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

فيكون عدد الطلاب في الفئة (C) هو :

$$750 \times 0.1587 = 119 \text{ طالب}$$

٢- نسبة الطلاب العشرة الأوائل من عدد الطلاب الكلي هو :

$$\frac{10}{750} = \frac{1}{75}$$

وإذا كانت (x) أقل درجة نالها طالب من العشرة الأوائل فإن :

$$P(X \ge x) = \frac{1}{75}$$
$$\Longrightarrow 1 - P(X < x) = \frac{1}{75}$$
$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{بالمعايرة}} 1 - P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)} < \frac{x-60}{10}\right) = \frac{1}{75}$$
$$\Longrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-60}{10}\right) = \frac{1}{75}$$
$$\Longrightarrow 1 - \phi\left(\frac{x-60}{10}\right) = \frac{1}{75}$$
$$\Longrightarrow \phi_Z\left(\frac{x-60}{10}\right) = \frac{74}{75} = 0.9868$$

باستخدام الجدول نجد أن (z) المقابلة لقيمة الاحتمال (0.9868) هي $(z = 2.22)$

$$\Rightarrow \phi_Z\left(\frac{x-60}{10}\right) = \phi(2.22)$$
$$\frac{x-60}{10} = 2.22$$
$$\Rightarrow x = 82$$

وهي أقل درجة حصل عليها طالب من العشرة الأوائل .

z	0.00	0.01	0.02
$\vdots$			$\vdots$
2.2	…	…	$\phi_Z(2.22) = 0.9868$

بعض خواص المتغيرات العشوائية الطبيعية المستقلة

١-إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ولكل منهما التوزيع التالي :

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

فإن للمتغير العشوائي التالي : $Y = a_1X_1 + a_2X_2$

سيتبع التوزيع الطبيعي بوسيطين : $N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$

حيث a_1 و a_2 ثابتان حقيقيان .

ويمكن تعميم الخاصة بالشكل :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \,, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

٢- إذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها جميعا التوزيع الطبيعي نفسه بمتوسط (μ) وتباين (σ^2) فإن المتغير العشوائي $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ، سيكون له التوزيع الطبيعي التالي : $N(n\mu, n\sigma^2)$.

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة ^نهى حبشية ^نور مهرة