22/4/2018 الأحد

المحاضرة 10

النماذج اللاخطية

مقدمة عامة:

أي نموذج رياضي يتألف من تابع هدف وقيود، إذا كان كلاً من تابع الهدف والقيود توابع خطية يكون النموذج الرياضي نموذج خطي سبق دراسته في المحاضرات السابقة.

أما إذا كان تابع الهدف أو أحد القيود على الأقل غير خطي يكون النموذج الرياضي نموذج لا خطي.

وقيود عدم السلبية مشمولة ضمناً في قيود هذا النموذج.

- إن أي شعاع $\vec{x}$ يحقق مجموعة القيود ندعوه حلاً نافذاً أو حلاً مقبولاً (القيود ممكن تكون متراجحات وممكن تكون مساواة)
- إن العديد من مسائل البرمجة اللاخطية لها عدة أشمة حل.
- إن القرار بأن مسألة برمجة لاخطية تملك أو لا تملك حلاً أمثلاً يتعلق بكون أو عدم كون المسألة محدودة بالنسبة لمتحولات الحل الخاص بها.
- إن تعيين ما إذا كان هنالك حل أمثل موجود لمسألة برمجة لاخطية محدودة هو أمر يتعلق بتابع الهدف والقيود.

التوابع المتزايدة والمتناقصة:

لتكن لدينا مجموعة النقاط: $x_1, x_2, \dots, x_n$

حيث: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

* إذا كان: $f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n)$

عندها نقول إن التابع متزايد تماماً:

* أما إذا كان من أجل: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

فإن: $f(x_1) > f(x_2) > \dots > f(x_n)$

عندها نقول إن التابع متناقص تماماً.

* أما إذا كان من أجل : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

فإن : $f(x_n) \le f(x_{n+1})$

عندها نقول إن التابع متزايد

* وإذا كان من أجل : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

فإن : $f(x_n) \geq f(x_{n+1})$

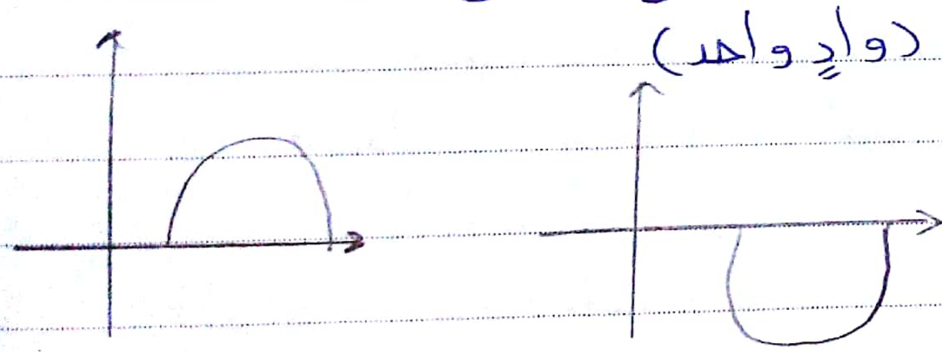
عندها نقول إن التابع متناقص .

- إن تزايد وتناقص التابع يحدد لنا فيما إذا كان التابع أحادي النمط أو متعدد الأنماط .

⑤ المقصود بالتابع أحادي النمط :

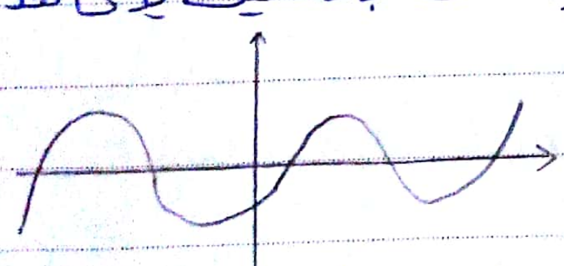
إذا كان التابع $f(x)$ يتزايد (يتناقص) تماماً ضمن مجال معين إلى قيمة معينة ثم يتناقص (يتزايد) عندها نقول إن هذا التابع أحادي النمط وبالتالي يكون للتابع قمة واحدة (وادٍ واحد)

أمثلة :



⑤ المقصود بالتابع متعدد الأنماط :

إذا كان للتابع أكثر من قمة وأكثر من وادٍ ضمن مجال معين يدعى هذا التابع تابعاً متعدد الأنماط .



⑤ المقصود بالنقطة المثالية (المحلية) :

تكون مقابلة لحل أمثل ، أي ضمن مجال معين حول هذه النقطة مع ملاحظة أنها قد تكون أعلى من نقاط أخرى ضمن فضاء الحلول بأكملها

بما أنه من الممكن وجود العديد من هذه النقاط خلال صياغة برمجة لاخطية

عامة فإن هذه النقاط تدعى نقاطاً مستقرة.

ملاحظة:

يمكن أن تكون النقاط مستقرة عند نهاية صغرى محلية أو عند نقطة انقطاع أو عند نهاية عظمى.

تصنيفات التوابع:

التوابع المحدبة والتوابع المقعرة:

تعريف التابع المحدب: يكون التابع $f(x)$ تابعاً محدباً على مجال تعريفه إذا انتحقق لأجل أي نقطتين x_1 و x_2 في فضاء بعده n الشرط التالي أو المتراجحة التالية:

$$f[(1-\theta)x_1+\theta x_2] \leq (1-\theta)f(x_1)+\theta f(x_2) \;;\; 0 \leq \theta \leq 1$$

- نعرف التابع المقعر بشكل مشابه ولكن بإشارة تراجح معكوسة.

* المعنى الهندسي للتعريف السابق:

إذا كان تابع ما محدب (مقعر) ورسم خط بياني بين نقطتين على سطحه فإن الجزء من الخط الذي يصل هاتين النقطتين سيتوضع بشكل كامل إلى أسفل (أعلى) ذلك التابع.

وهنا نقدم الحقائق التالية:

$\boxed{1}$ لا يتعلق تعريف تابع محدب (مقعر) بكون التابع مستمر أو غير مستمر.

$\boxed{2}$ يمكن أن يكون تابع ما مقعراً في منطقة ومحدباً في أخرى

هامة $\boxed{3}$ التابع الخطي محدب ومقعر في آن معاً (كيف بيخدمني بحكي عنو على كيفي)

Scanned by CamScanner

/ /

تأثير التحدب والتقعر في البحث عن الحل الأمثل : (هامة)

① حد أعظمي أو حد أصغري غير مقيّد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف فقط وكان هذا التابع محدباً (مقعراً) فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع داخل المنطقة النافذة، حيث تنعدم عندها جميع المشتقات الجزئية أو عند نقطة حدية.

② القيمة العظمى مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة كل من التابع ومجموعة القيود.

فإذا كان تابع الهدف مقعراً ومجموعة القيود تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسألة.

وبالتالي فإن أي نقطة مستقرة يجب أن تكون حلاً أعظمياً شمولياً.

③ القيمة الصغرى مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود وكان تابع الهدف محدباً ومجموعة القيود محدبة (تشكل منطقة محدبة) عندئذٍ فإن القيمة قيمة صغرى.

عندئذٍ فإن أي نقطة مستقرة (ثابتة) تشكل حلاً أصغرياً شمولياً.

/ /

المصفوفات الصغرى الأساسية.

* تعريف المصفوفة الصغرى الأساسية:

لتكن لدينا المصفوفة المربعة Q ذات البعد $n \times n$ ، عندئذٍ نعرف المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة $k \leq n$ بأنها كل مصفوفة من المرتبة $k \times k$ نحصل عليها من Q بحذف $(n-k)$ سطر وحذف الأعمدة المقابلة لكل سطر.

مثال تطبيقي:

لتكن لدينا المصفوفة Q بالشكل:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ:

- المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 1 هي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة Q
- المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 2 هي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} \quad , \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}} \quad , \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}}$$

ناتجة من حذف السطر الثالث والعمود الثالث ، ناتجة من حذف السطر الثاني والعمود الثاني ، ناتجة من حذف السطر الأول والعمود الأول

- المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 3 هي Q نفسها .

تعريف:

ندعو معين المصفوفة الصغرى الأساسية بالمعين الأساسي حيث أنه لكل مصفوفة مربعة من البعد $n \times n$ يوجد $2^n - 1$ معيناً أساسياً.

Scanned by CamScanner

* تعريف المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية:

لتكن لدينا المصفوفة المربعة Q ذات البعد $n \times n$ عندئذٍ نعرف المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة $k \leq n$ بأنها كل مصفوفة من المرتبة $k \times k$ نحصل عليها من Q بحذف الأسطر $(n-k)$ الأخيرة وحذف الأعمدة المقابلة لكل سطر من الأسطر السابقة.

مثال تطبيقي:

لتكن لدينا المصفوفة Q بالشكل:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ:

- المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 1 هي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}$$

ناتجة من حذف السطرين الأخيرين والعمودين الأخيرين

- المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 2 هي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}$$

ناتجة من حذف السطر الأخير والعمود الأخير.

- المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 3 هي Q نفسها.

ملاحظة:

يوجد n مصفوفة صغرى أساسية رئيسية في المصفوفة ذات البعد $n \times n$

~~المصفوفة المرفقة الموجبة / المعرفة السالبة:~~

نقول عن Q أنها معرفة موجبة إذا تحققت الشروط

/ /

* بعض من الاختبارات لتعيين فيما إذا كانت مصفوفة مربعة ما هي مصفوفة معرفة موجبة أو معرفة سالبة أو شبه معرفة موجبة أو شبه معرفة سالبة

لتكن لدينا المصفوفة المربعة Q عندئذٍ نناقش حالتين :

1 الحالة الأولى : إذا كانت Q مصفوفة متناظرة .

1- نقول عنها أنها معرفة موجبة إذا تحققت الشروط الآتية :

- عناصر القطر الرئيسي لها موجبة تماماً أي عناصر القطر الرئيسي أكبر تماماً من الصفر.
- قيم كل المحددات (المعينات) للمصفوفات الأساسية الرئيسية في Q موجبة تماماً أي قيم تلك المحددات أكبر تماماً من الصفر.

2- نقول عنها أنها معرفة شبه موجبة إذا تحققت الشروط الآتية :

- عناصر القطر الرئيسي لها غير سالبة أي عناصر القطر الرئيسي أكبر أو تساوي الصفر
- قيم كل المحددات (المعينات) للمصفوفات الأساسية الرئيسية في Q غير سالبة أي قيم تلك المحددات أكبر من أو تساوي الصفر.

2 الحالة الثانية : إذا كانت Q مصفوفة غير متناظرة فإن المصفوفة $M = \frac{Q + Q^T}{2}$ هي مصفوفة متناظرة وبحيث Q^T هي منقول المصفوفة Q

- نقول عن Q غير المتناظرة أنها معرفة موجبة إذا وفقط إذا كانت المصفوفة M معرفة موجبة.
- نقول عن Q غير المتناظرة أنها معرفة شبه موجبة إذا وفقط كانت المصفوفة M معرفة شبه موجبة

ملاحظة :

لإثبات أن مصفوفة ما Q معرفة سالبة أو معرفة شبه سالبة يكفي أن نثبت أن المصفوفة $-Q$ معرفة موجبة أو معرفة شبه موجبة .

تعريف مصفوفة هيسيان (المصفوفة الهيسية)

ليكن لدينا التابع $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

نعرف تدرج التابع f بالشكل:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

ونعرف مصفوفة هيسيان للتابع f بأنها مصفوفة مربعة متناظرة من ذات البعد $n \times n$ تعطى بالشكل التالي:

$$H_{f(x_1, \dots, x_n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right) \quad ; \; i, j = \overline{1, n}$$

$$H_{f(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

اختبارات تحدب أو تقعر تابع ما:

ليكن لدينا تابع ما f. عندئذٍ:

f محدب: إذا كانت المصفوفة الهيسية له معرفة موجبة أو معرفة شبه موجبة

f مقعر: " " " " " معرفة سالبة أو معرفة شبه سالبة

انتهى

بيان الباشا ^^