◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: الخامسة عشر ◄ العنوان: الترابط في الفضاءات المترية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- الترابط في الفضاءات المترية وأمثلة عنه.
- حل تمارين أفكار سابقة.

الترابط في الفضاءات المترية :

- تعريف المجموعة المترابطة :ليكن (X,d) فضاء متري و $Y \subseteq X$ نقول أن المجموعة Y مترابطة إذا **لم يكن** بالإمكان إيجاد مجموعتين مفتوحتين في X مثل $A\ ,\ B$ بحيث:

$$1)\ Y \subseteq A \cup B \qquad 2)\ Y \cap A \cap B = \emptyset$$

$$3)\ Y \cap A \neq \emptyset \neq Y \cap B$$

وفي حال $Y = X$ نقول أن الفضاء X مترابط وفي هذه الحالة يصبح الشرط : إذا **لم يكن** بالإمكان إيجاد مجموعتين مفتوحتين في X مثل $A\ ,\ B$ بحيث:

$$X = A \cup B \quad , \quad A \cap B = \emptyset \quad , \quad A \neq \emptyset \neq B$$

أمثلة:

1) في الفضاء المتري المتقطع (X,δ):

أ) ليكن $|x| > 1$ أي عدد عناصر X أكبر من واحد هو فضاء غير مترابط **لأن :** بأخذ

$$\emptyset \neq A \underset{\neq}{\subset} X$$

إن A مفتوحة ولنأخذ $A^c = B \neq \emptyset$ أن B مفتوحة:

$$\Rightarrow \quad X = A \cup B \quad , \quad A \cap B = \emptyset \quad , \quad A \neq \emptyset \quad , \quad B \neq \emptyset$$

وجدنا مجموعتين مفتوحتين تحققان الشروط فهي غير مترابطة

ب) ليكن $Y \subseteq X$ و $|Y| > 1$ إن Y غير مترابطة **لأن:** لنأخذ

$$\emptyset \neq A \underset{\neq}{\subset} Y$$

إن A مفتوحة. ولنأخذ $B = A^c \neq \emptyset$ و B مفتوحة أيضا في X :

$$\Longrightarrow \quad 1)\ Y \subseteq A \cup B = X \qquad 2)\ A \cap B = \emptyset$$

$$3)\ Y \cap A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow Y \cap A \neq \emptyset \neq Y \cap B$$

2) في الفضاء $(R, |.|)$ إن المجموعة Q غير مترابطة لأن: ليكن لدينا المجموعتان المفتوحتان

$$A =]-\infty, \sqrt{2}[\quad , \quad B =]\sqrt{2}, \infty[$$

$$1)\ Q \subseteq A \cup B = R \setminus \{\sqrt{2}\} \qquad 2)\ Q \cap A \cap B = \emptyset$$

$$:\ Q \cap A \neq \emptyset \neq Q \cap B$$

3) كل المجالات في $(R, |.|)$ وحصرا كل المجالات مترابطة في R

❖تمارين وظيفة للمحاضرة القادمة :

١) إذا كانت E مترابطة في الفضاء المتري (X, d) وكان $E \subseteq F \subseteq \bar{E}$ فإن F مترابطة في X

٢) إذا كان $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ تابع مستمر وكان $X \supseteq E$ مترابطة في X فإن $f(E)$ مترابطة في Y

❖مثال :

على نقطة ملاصقة لمجموعة لكنها ليست حدية

في الفضاء $(R, |.|)$ لتكن $A = [0,1] \cup \{2\}$

إن $x = 2$ نقطة ملاصقة لـ A لأن : $x \in A$ لكنها ليست حدية لـ A لأن:

$$\forall\ \varepsilon = 1\ ; N(2,1) \cap (A \setminus \{2\}) =]2-1, 2+1[\cap [0,1] =]1,3[\cap [0,1] = \emptyset$$

<u>إذا $x = 2$ لم تحقق شرط النقطة الحدية.</u>

تمرين ليكن X فضاء متري و $A \subseteq X$ أذا كان $\bar{A}^{\circ} = \emptyset$ فإن $B = X \setminus \bar{A}$ كثيفة في X

<u>الحل:</u> لنضع $D = \bar{A}$ عندئذ:

$$\bar{B} = \overline{X \setminus \bar{A}} = \overline{X \setminus D} = X \setminus D^{\circ} = X \setminus (\bar{A})^{\circ} = X \setminus \emptyset = X = \bar{B}$$

إذا B كثيفة في X

تمرين: ليكن X فضاء متري و $A \subseteq X$ فإن A° مجموعة مفتوحة .

(الحل)

$$\forall\, x \in A^\circ \implies \exists\, \varepsilon > 0 \,;\, N(x,\varepsilon) \subseteq A$$

وجدنا في مبرهنة سابقة أن : $N(x,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة

إذا كانت $y \in N(x,\varepsilon)$ فإنه :

$$\exists\, r > 0 : N(y,r) \subseteq N(x,\varepsilon) \subseteq A \implies N(y,r) \subseteq A$$

إذا y نقطة داخلية في A $\Leftarrow$ كل نقاط $N(x,\varepsilon)$ داخلية في A $\Leftarrow$ $N(x,\varepsilon) \subseteq A^\circ$

$\Leftarrow$ A° مجموعة مفتوحة .

تمرين: ليكن $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ تابع مستمر $\Leftrightarrow$ $\forall\, A \subseteq Y \;; f^{-1}(A^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(A)\right)^\circ \ldots\ldots \heartsuit$

(الحل)

$(\Leftarrow)$ ليكن f مستمر ونبرهن العلاقة (♥)

إن $A \subseteq Y \Leftarrow A^\circ$ مجموعة مفتوحة في (Y,ρ) وبما أن f مستمر إذا الصورة العكسية لكل مفتوحة في Y مفتوحة في X

$$\Leftarrow \; f^{-1}(A^\circ) \text{ مفتوحة } \Leftarrow A^\circ \subseteq A \Leftarrow \; f^{-1}(A^\circ) \subseteq \underbrace{f^{-1}(A)}_{\text{مفتوحة}}$$

إذا كل نقطة في $f^{-1}(A^\circ)$ داخلية فيها وبالتالي هي داخلية في $f^{-1}(A)$

$$\implies f^{-1}(A^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(A)\right)^\circ$$

$(\Rightarrow)$ لنفرض أن (♥) صحيحة ولنبرهن أن f مستمر

لتكن A مجموعة مفتوحة في $Y \Leftarrow A^\circ = A$

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A^\circ) \underset{\text{من}\heartsuit}{\subseteq} \left(f^{-1}(A)\right)^\circ \subseteq f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A) = \left(f^{-1}(A)\right)^\circ$$

إذا $f^{-1}(A)$ مفتوحة في $X \Leftarrow f$ مستمر حسب مبرهنة سابقة

تمرين: ليكن $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ تابع مستمر $\Leftrightarrow$ ♥.... $\forall A\subseteq Y\ ;\overline{f^{-1}(A)}\subseteq f^{-1}(\bar{A})$

(الحل)

($\Leftarrow$) ليكن f مستمر ونبرهن العلاقة (♥)

لتكن $A\subseteq Y \Leftarrow \bar{A}$ مغلقة (دوما) وبما أن f مستمر إذا الصورة العكسية ل $\bar{A}$ مغلقة في Y إذا :

$\Leftarrow$ $f^{-1}(\bar{A})$ مغلقة في X

$$\Leftarrow A\subseteq\bar{A}\quad\Leftarrow\quad f^{-1}(A)\subseteq\underbrace{f^{-1}(\bar{A})}_{\text{مغلقة}}$$

مجموعة مغلقة تحوي مجموعة فهي تحوي لصاقتها

$$\Leftarrow\quad\overline{f^{-1}(A)}\subseteq f^{-1}(\bar{A})$$

($\Rightarrow$) نبرهن أن f مستمر بالاعتماد على ((الصورة العكسية لكل مغلقة في Y مغلقة في X $\Leftrightarrow$ f مستمر))

لتكن $A\subseteq Y$ مجموعة مغلقة إذا $\bar{A}=A$

$$\Rightarrow f^{-1}(\bar{A})=f^{-1}(A)\ \Rightarrow\ \overline{f^{-1}(A)}\underbrace{\subseteq}_{\text{من ♥}} f^{-1}(\bar{A})=f^{-1}(A)\subseteq\overline{f^{-1}(A)}$$

$$\Rightarrow\quad f^{-1}(A)=\overline{f^{-1}(A)}$$

$$\Rightarrow\quad f^{-1}(A)\ \text{مغلقة}$$

<u>ومنه f مستمر</u>

تمرين: ليكن $Fr\,A\subseteq A^c \Leftrightarrow A$ مجموعة مفتوحة :

(الحل)

إن $Fr\,A=\bar{A}\backslash A^\circ$ ولدينا $Fr\,A\subseteq A^c$ ومنه :

$$\bar{A}\backslash A^\circ\ \subseteq A^c\ \Rightarrow\ A\subseteq(\bar{A}\backslash A^\circ)^c$$

$$\Rightarrow\ A\subseteq(\bar{A}\cap(A^\circ)^c)^c\ \Rightarrow\ A\subseteq(\bar{A})^c\cup((A^\circ)^c)^c\ \Rightarrow\ A\subseteq(\bar{A})^c\cup A^\circ$$

ولدينا $(\bar{A})^c=X\backslash\bar{A}=(X\backslash A)^\circ=(A^c)^\circ$

$$\Rightarrow A\subseteq(A^c)^\circ\cup A^\circ\subseteq\ A^c\cup A^\circ\ \Rightarrow\ A\subseteq A\cap(A^c\cup A^\circ)=(A\cap A^c)\cup(A\cap A^\circ)$$

$$\Longrightarrow A \subseteq \emptyset \cup A^{\circ} = A^{\circ}$$

ولدينا $A \subseteq A^{\circ} \Longleftarrow A = A^{\circ}$ ومنه A مفتوحة

(⟸) وبالعكس ليكن A مجموعة مفتوحة $\Longleftarrow A = A^{\circ}$

$$\Longrightarrow Fr\, A = \bar{A} \setminus A^{\circ} = \bar{A} \setminus A = \bar{A} \cap A^{c} \subseteq A^{c}$$

$$\Longrightarrow Fr\, A \subseteq A^{c}$$

تنويه: ((خطأ بالمحاضرة العاشرة))

١)كتبنا أن المثال الثانى للاطلاع لكنه مطلوب..... والمثال الثالث هو للاطلاع

٢)فى نهاية المحاضرة الثانية عشر فى تعريف المجموعة المتراصة توجد كلمة منتهية (نقول عن المجموعة $K \subseteq X$ أنها متراصة إذا أمكن استخراج تغطية جزئية ((منتهية)))

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو ¤¤ هديل سعيد ¤¤ هالة مصطفى