◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :الثامنة عشر و التاسعة عشر (الأخيرة)

عنوان المحاضرة:القياس و خواصه

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. التوابع القيوسة
2. التابع القيوس المميز
3. خواص التابع المميز
4. التابع البسيط $f: X \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

تعريف التابع القيوس:

ليكن $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ و $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ فضائيين قياس عندئذ

$$f: X \to Y$$

نقول عن التابع f أنه تابع قيوس اذا كانت الصورة العكسية للمجموعة القيوسة في Y هي مجموعة قيوسة X أي

$$\forall B \in \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{مجموعة المجموعات قيوسة}} \Longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

التابع القيوس (المميز) لتكن: $X \neq \emptyset$ عندئذ من أجل أي مجموعة $A \subseteq X$ تعرف الدالة:

$$\forall x \in X: \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حيث $\mathcal{X}$ غافا و ليست X المجموعة الشاملة

خواص التابع (الدرجي)(المميز)

1) $\mathcal{X}_X(x) = 1$ غافا x ل X

2) $\mathcal{X}_{\emptyset}(x) = 0$

3) $\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x)$ حيث $A \cap B = \emptyset$

4) $\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$

5) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{X}_A(x) \leq \mathcal{X}_B(x)$

6) $\mathcal{X}_{A\setminus B}(x) = \mathcal{X}_A(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$

7) $\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$

8) $\mathcal{X}_{A\Delta B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - 2\mathcal{X}_{A\cap B}(x)$

التابع البسيط:

نقول عن f أنه بسيط اذا كانت مجموعة قيمه منتهية

$$f : X \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

مثال عن الدوال البسيطة (الدوال الدرجية):

$$\forall x \in A = [0,3] : \quad g(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & : \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & : \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

مجموعة قيم المنتهية هي $\{0,1,2,3\}$

مبرهنة:

كل تابع بسيط يكتب على شكل تركيب خطي لتوابع مميزة (درجية)

أي بالشكل

$$\forall x \in X \ : f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ \mathcal{X}_{A_i}(x)$$

حيث أن c_i قيم التابع f و A_i مجموعات تحقق أن

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ ;\forall i,j \in \mathbb{N} : A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j$$

((A_i مجموعات منفصلة مثنى مثنى)) تشكل تجزئة ل X أي نلاحظ أن

$$\forall x \in X : f(x) = c_1 \mathcal{X}_{A_1}(x) + c_2 \mathcal{X}_{A_2}(x) + \cdots + c_n \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

نتيجة: كل تابع بسيط هو تابع قيوس .

مثال:

لتكن الدالة f حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,3[= A_1 \\ 3 & x \in [3,6[= A_2 \\ 7 & x \in [6,7] = A_3 \end{cases}$$

حيث $X = [0,7]$ فإنه يمكننا كتابة f بالشكل التالي :

$$f(x) = 2\mathcal{X}_{A_1}(x) + 3\mathcal{X}_{A_2}(x) + 7\mathcal{X}_{A_3}(x)$$

إذا اردنا حساب $f(6) = 2(0) + 3(0) + 7(1) = 7$

تكامل لوبيغ:

تعريف تكامل لوبيغ لتابع بسيط:

اذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قيوسا و كان f تابعا بسيطا مجموعة قيمه c_i حيث $i \in \mathbb{N}$ نعرف تكامل لوبيغ للتابع f على X بالنسبة للقياس μ كما يلي (μ قياس لوبيغ)

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$$

$$\underbrace{A_i \cap A_j}_{i \neq j} = \emptyset \,, X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

c_i قيم التابع البسيط f

$$A_i = \{x \in X : f(x) = c_i,\} = f^{-1}(\{c_i\})$$

تمرين:

اكتب التابع البسيط التالي $f(x)$ على شكل تركيب خطي للتابع الدرجي

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1[\\ 1 & : \quad x \in [1,2[\\ 2 & : \quad x \in [2,3[\\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن التابع f بسيط حيث

$$f : X \to \{c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 3\}$$

و منه يمكن كتابة الدالة f على شكل تركيب خطي كون f دالة بسيطة

$$f(x) = c_1 \mathcal{X}_{[0,1[}(x) + c_2 \mathcal{X}_{[1,2[}(x) + c_3 \mathcal{X}_{[2,3[}(x) \ + c_4 \mathcal{X}_{[3,3]}(x)$$

$$f(x) = 0\mathcal{X}_{[0,1[}(x) + 1\mathcal{X}_{[1,2[}(x) + 2\mathcal{X}_{[2,3[}(x) \ + 3\mathcal{X}_{[3,3]}(x)$$

و إذا أردنا حساب تكامل لوبيغ ل f على المجال $[0,3]$ فإن:

$$\int_{[0,3]} f \, d\mu = 0\mu([0,1]) + 1\mu([1,2[\ ) + 2\mu([2,3[\ ) + 3\mu([3,3])$$

$$= 0.1 + 1.1 + 2.1 + 3.0 = 3$$

و منه يتم المطلوب.

و لو ردنا حساب التكامل باستخدام تكامل ريمان نحصل على نفس النتيجة حيث

$$\int_0^3 [x]dx = \int_1^2 dx + 2\int_2^3 dx = [x]_1^2 + 2[x]_2^3 = 1 + 2 = 3$$

تمرين:

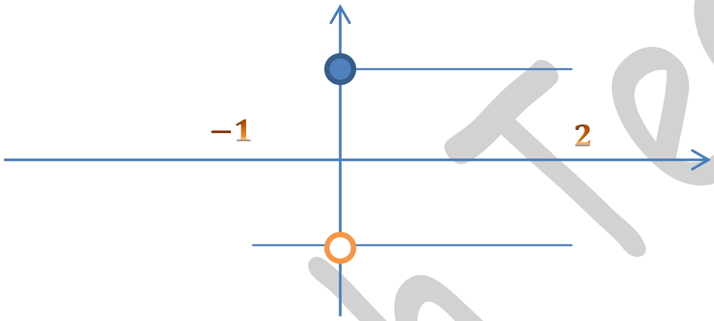
احسب تكامل لوبيغ للتابع

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \quad -1 \le x \le 0 \\ 1 & : \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

حيث $A_1 = [-1,0[$ و $A_2 = [0,2]$

أوجد $\int_{[-1,2]} f(x)d\mu$

الحل:



$$\int_{[-1,2]} f\, d\mu = -\mu(A_1) + \mu(A_2) = -1.1 + 1.2 = 1$$

حيث $\mu([-1,0[\,) = 0 - (-1) = 1$ و $\mu([0,2]) = 2 - 0 = 2$

تمرين:

احسب التكامل

$$\int_{[0,1]} f(x)d\mu : f(x) \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الحل:

$\mathbb{Q} = \cup_{i=1}^{\infty}[x_i]$ && $[x_i] = [x_i, x_i]$ فإن $\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu[x_i, x_i] = 0$

و الأن بحل التمرين

إن $X = [0,1]$ و إن $A_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ و $A_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

و منه تكون A_1 هي نقاط العادية الموجودة داخل المجال $[0,1]$ و A_2 هي الأعداد غير العادية الموجودة داخل المجال $[0,1]$

نلاحظ $A_1 \cup A_2 = [0,1]$ و $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 1\mu(A_1) - 1\mu(A_2) = 1\,.\,0 - 1\,\mu([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = -1[\mu[0,1] - \mu(\mathbb{Q})]$$
$$= -1[1-0] = -1$$

$$((\,\mu(A_1) = \mu(\mathbb{Q}) = 0))$$

تمرين:

أوجد التكامل

$$\int_{[0,3]} f(x) d\mu : \quad f(x) = 3[x] + 1$$

الحل:

$$[x] = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1[\\ 1 & : \quad x \in [1,2[\\ 2 & : \quad x \in [2,3[\\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [0,1[\\ 4 & : \quad x \in [1,2[\\ 7 & : \quad x \in [2,3[\\ 10 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

$$\int_{[0,3]} f \;\, d\mu = 1\mu(\,[0,1[\,) + 4\mu(\,[1,2[\,) + 7\mu(\,[2,3[\,) + 10\,\mu([3,3])$$

$$= 1.1 + 4.1 + 7.1 + 10\;.\;0 = 12$$

حيث قياس المجال هو البداية ناقص النهاية.

تمرين:

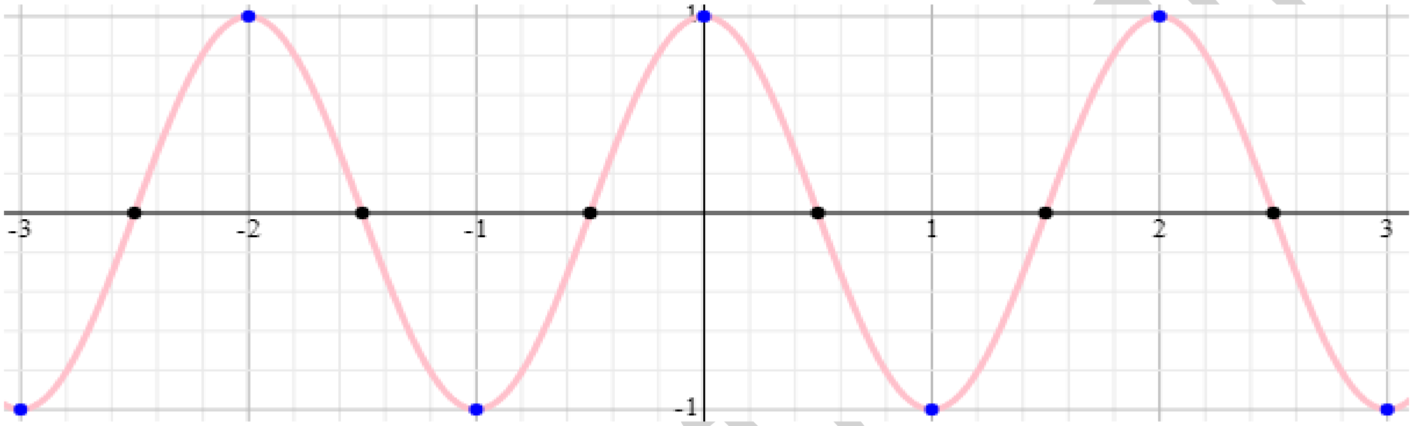
احسب تكامل تابع الإشارة التالي

$$\int_{[-3,3]} sign(\cos \pi x) d\mu \quad : \quad sign(w) = \begin{cases} 1 & : \ w > 0 \\ 0 & : \ w = 0 \\ -1 & : \ w < 0 \end{cases}$$

الحل:

الأن لحل هذا التمرين نقوم بتجزئة المجال و سيكون كالتالي

$$A_1 : \cos \pi x > 0 \ , \ A_2 : \cos \pi x = 0 \ , \quad A_3 : \cos \pi x < 0$$



لحساب A_2 عن طريق $\cos \pi x = 0$

$$\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \ : \quad \text{نقسم على } \pi \rightarrow x = \frac{1}{2} + k$$

و منه فإن $k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $k = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $k = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ , \quad k = -2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \ , \quad k = -3 \Rightarrow x = -2,5$$

نلاحظ أن عند أخذ $k = 3$ تكون x خارج المجال $[-3,3]$ و لذلك فإن $k = 0,1,2,-1,-2 - 3$

و منه فإن $\quad A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\}$

قياس لوبيغ ل A_2 هو $\mu(A_2) = 0$ لأن A_2 هي اجتماع مجموعات (مجالات) وحيدة العنصر
و الأن لحساب A_1, A_3 نستفيد من الرسمة السابقة

فتكون $\cos \pi x > 0 \ : \ A_1$ أي أن A_1 هي القسم الأعلى لox في المنحني أي أن

$$A_1 =]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$$

كون A_1 مكونة من اجتماع مجالات منفصلة مثنى مثنى فإن قياس لوبيغ لها هو

$$\mu(A_1) = \mu(\left]-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right[) + \mu(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[) + \mu(\left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[)$$

و منه فإن قياس المجال A_1 هو $\mu(A_1) = 1 + 1 + 1 = 3$

و يكون $\cos \pi x < 0$: A_3 هو القسم السفلي ox للمنحني أي أن

$$A_3 = [-3,-2.5[\cup \left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2},3\right]$$

كون A_3 مكونة من اجتماع مجالات منفصلة مثنى مثنى فإن قياس لوبيغ لها هو

$$\mu(A_3) = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3$$

نجد أن

$$x \in A_1 \Rightarrow \cos \pi x > 0 \Rightarrow sign(w) = 1$$

$$x \in A_2 \Rightarrow \cos \pi x = 0 \Rightarrow sign(w) = 0$$

$$x \in A_3 \Rightarrow \cos \pi x < 0 \Rightarrow sign(w) = -1$$

بما أن A_1, A_2, A_3 تشكل تجزئة ل X فإنه حسب التعريف

$$I = \int_{[-3,3]} sign(\cos \pi x) d\mu = c_1\mu(A_1) + c_2\mu(A_2) + c_3\mu(A_3)$$

$$= 1.3 + 0.0 + (-1).3 = 0$$

تمارين الوظيفة:

-1 أحسب قياس المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ علما أن

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + 3^{-n}, n + 2^{-n}]$$

وضح ذلك بالرسم من أجل $n = 1,2,3$

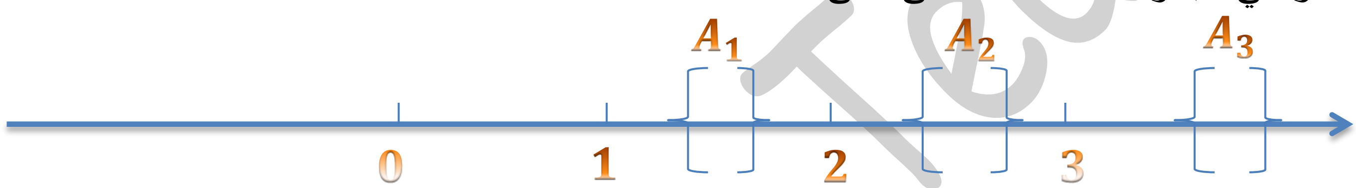
الحل:

$$A_1 = \left[1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$A_2 = [2 + \frac{1}{3^2}, 2 + \frac{1}{2^2}]$$

$$A_3 = [3 + \frac{1}{3^3}, 3 + \frac{1}{2^3}]$$

و هي مجموعات منفصلة مثنى مثنى



$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n + \frac{1}{3^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left[n + \frac{1}{3^n}, n + \frac{1}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[n + \frac{1}{2^n} - n - \frac{1}{3^n}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

برهن خواص التوابع الدرجية :

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in A \\ 0 & : \quad x \notin A \end{cases}$$

$$1) \quad \mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$$

الإثبات:

نميز الحالات التالية

$$1- \quad x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 1 \\ x \in B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = 1 = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$$

$$2- \quad x \notin A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = \mathcal{X}_B(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = 0 = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$$

$$3- \quad x \notin A \cap B \,, x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \,, x \in B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1, \mathcal{X}_A(x) = 0 \\ x \notin B \,, x \in A \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 0, \mathcal{X}_A(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{X}_{A\cap B}(x) = 0 = 0.1 = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x) \\ \mathcal{X}_{A\cap B}(x) = 0 = 1.0 = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x) \end{cases}$$

و منه فإن العلاقة محققة في جميع الحالات فهي صحيحة.

$$2)\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) \ : \ A \cap B = \emptyset$$

الإثبات:

نميز الحالات التالية:

$$1- \ x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = \mathcal{X}_B(x) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_{A\cup B}(x) = 0 = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x)$$

$$2- x \in A \cup B \,, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x \in A \,, x \notin B \\ x \in B \ \,, x \notin A \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{A\cup B}(x) = 1 = 1 + 0 = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) \\ \mathcal{X}_{A\cup B}(x) = 1 = 0 + 1 = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) \end{cases}$$

علاقة محققة في جميع الحالات فهي صحيحة

$$3) \ A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) \leq \mathcal{X}_B(x)$$

الإثبات:

نميز الحالات التالية:

$1-\quad x\in A\Rightarrow \mathcal{X}_A(x)=1\,;x\in B\Rightarrow \mathcal{X}_B(x)=1\Longrightarrow 1\le 1$ محققة

$2-\quad x\notin A\Rightarrow \mathcal{X}_A(x)=0\,;x\in B\Rightarrow \mathcal{X}_B(x)=1\Longrightarrow 0\le 1$ محققة

$3-\quad x\notin A\Rightarrow \mathcal{X}_A(x)=0\,;x\notin B\Rightarrow \mathcal{X}_B(x)=0\Longrightarrow 0\le 0$ محققة

و منه العلاقة صحيحة في جميع الحالات.

$$4)\mathcal{X}_{B\setminus A}(x)=\mathcal{X}_B(x)-\mathcal{X}_A(x)\quad :\quad A\subseteq B$$

الإثبات:

$$B=A\cup(B\setminus A)$$

$A,B\setminus A$ منفصلتان أي

$$A\cap(B\setminus A)=\emptyset$$

حسب خاصة سابقة إن

$$\mathcal{X}_B(x)=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_{B\setminus A}(x)\Rightarrow \mathcal{X}_{B\setminus A}(x)=\mathcal{X}_B(x)-\mathcal{X}_A(x)$$

الخاصتان التاليتان تتركان للقارئ☺

$$\mathcal{X}_{A\cup B}(x)=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)-\mathcal{X}_{A\cap B}(x)$$
$$\mathcal{X}_{A\Delta B}(x)=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)-2\mathcal{X}_{A\cap B}(x)$$

عرف القياس ثم برهن ما يلي:

$$1)\ A\subseteq B\Rightarrow \mu(A)\le\mu(B)$$
$$2)\ \mu(A\Delta B)\Rightarrow \mu(A)+\mu(B)-2\mu(A\cap B)$$
$$3)\ \mu(A\cup B)\Rightarrow \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$
$$4)\ if\ A\Delta B=0\Rightarrow \mu(A)=\mu(B)$$

يترك للقارئ

- عرف القياس الخارجي ثم بين بمثال أنه ليس كل قياس خارجي هو قياس(محلول بالمحاضرة 17)
- عرف الجبر ثم بين أنه مغلق بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات (محلول بالمحاضرة15)

الأخطاء و التصحيح

الصواب	الخطأ	المحاضرة
الدالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية فرق الواحد	الدالة معرفة على مجموعة أعداد الحقيقية فرق الصفر	المحاضرة (1) الصفحة (4)
لنأخذ المسافة $\Delta p = \frac{b-a}{n}$	لنأخذ المسافة $p = \frac{(b-a)}{n}$	المحاضرة(3) الصفحة (1)
و تحقق الشرط أن $\|x+1\| > 0$	و تحقق الشرط أن $\|f_2(x)\| > 0$	المحاضرة (4) الصفحة(4)
حيث يكون المنحني على المجال $[1,2]$ بشكل قطع مكافئ	تصحيح رسمة التمرين الرابع	المحاضرة (6) الصفحة (3)
تكامل ريمان إذا كان $\int_a^c f dx$ و $\int_c^b f dx$ موجودين فإن $\int_a^b f\,dx$ موجود و بالعكس	تكامل ريمان إذا كان $\int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ موجودين فإن $\int_a^b f\,dx$ موجود و بالعكس	المحاضرة (11) الصفحة (4)
$g(1-0)=0, f(1)=1 \Rightarrow (0,1)$ $g(2-0)=1, f(2)=2 \Rightarrow (1,2)$ $g(3-0)=2, f(3)=3 \Rightarrow (2,3)$	$g(1-0)=0, f(1)=1 \Rightarrow (1,0)$ $g(2-0)=1, f(2)=2 \Rightarrow (2,1)$ $g(3-0)=2, f(3)=3 \Rightarrow (3,2)$	المحاضرة (14) الصفحة(11)

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

حلمنا نهار...نهارنا عمل
نملك الخيار...وخيارنا الأمل و تهدينا الحياة أضواء في أخر النفق تدعونا كي ننسى ألما
عشناه نستسلم لكن لا ما دمنا أحياء نرزق
ما دام الأمل طريقا فسنحياه
بالتوفيق للجميع